Paseando por Las Estufas del Retiro

Para Ana, Ander, Catalina, Carmen, Ibai, Ismael, Jacobo, Lola, Lucas, Lucía, Manuel, Nelson, Tristán y Vera.

Capi Corrales Rodrigáñez

Agradecimientos:

Marta Carral, Marcos Corrales, Francine Delmer, Narelle Jubelin, Helen Kersley, Curra Ortíz de Solórzano, Jaime Rodrigáñez, Sonia Tercero

Y, muy especialmente, Javier Spalla, Victoria Olaya Magadán, la familia Calamar, y todo el equipo que trabaja en el Vivero Municipal de Las Estufas del Retiro.

Índice:

1. Introducción

Tengo varias amigas con edad suficiente para ser abuelas, que se sienten realmente estafadas por no poder disfrutar de las matemáticas. Durante mucho tiempo, creyeron que la razón estaba en su propia incapacidad para entenderlas. Estaban convencidas, de hecho, de que si no conseguían disfrutar de las matemáticas era por no tener una cabeza adecuada para ello. Una de las muchas ventajas que tiene cumplir años, es que con la edad aprendemos a colocar muchas cosas en su sitio. A mis amigas ya no les cabe la menor duda al respecto: si no disfrutan con las matemáticas, es porque no tuvieron buenos profesores que se las enseñasen cuando eran niñas.

Siendo yo matemática, el tema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sale con frecuencia en nuestras conversaciones. Es muy difícil enseñar matemáticas en una escuela, les digo siempre. No porque las matemáticas que se enseñan (o deberían enseñarse) sean difíciles, sino porque no se cuenta con el ingrediente imprescindible para hacerlo: tiempo. Para poder enseñar matemáticas a criaturas, sólo se necesita tiempo en el que pensar en voz alta con ellas sobre el universo que nos rodea, hasta que puedan hacerlo por sí mismas.

"La filosofía[1] está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto."

Galileo Galilei, Il saggitore, cap. 6, p. 4

Hacer matemáticas es como montar en bicicleta, se aprende haciéndolo y se necesita que alguien nos ayude cuando empezamos. A nadie se le ocurriría enseñar a una criatura a montar en bicicleta explicándole la técnica sobre un diagrama en una pizarra, y mandándole luego a practicar a solas. Sin embargo, esa es la manera en que, por lo general, nos enseñan las matemáticas en la escuela, al no haber tiempo para hacerlo de otra forma. Yo tuve la suerte de contar con mi tío Eduardo Rodrigáñez[2], ingeniero agrónomo y matemático, que me enseñó a hacer matemáticas paseando por el Parque del Retiro. Con él aprendí que el proceso de aprendizaje de las matemáticas tiene tres fases, ver las ideas, describir las ideas y relacionar las ideas. La palabra 'idea' viene del griego ειδω, que significa ver, mirar u observar, y de ειδοζ, que significa figura, forma, aspecto o visión. Detrás de una montaña concreta está la idea de montaña, un dibujo abstracto, unas líneas que nos permiten reconocer la montaña detrás de las rocas, los pinos o la nieve. Las ideas de las cosas: eso, precisamente, era lo que me enseñaba a buscar mi tío Eduardo durante nuestros paseos 'matemáticos'.

[1] En época de Galileo, sinónimo de conocimiento.
[2] Padrino de mi madre que, huérfana de padre a los ocho años, siempre tuvo una relación muy estrecha con él.

Para ver con los ojos de la mente una idea, hay que entrenarse en observar y pensar sobre lo que se ve con los ojos de la cara. La mejor manera de entrenarnos a pensar sobre lo que vemos con los ojos de la cara, es describir lo que estamos viendo. No lo que nosotros en nuestro interior sentimos ante lo que estamos viendo, sino la idea detrás de lo que estamos viendo. Una vez hemos reconocido la idea detrás de algo, tenemos que describirla. Para describir una idea, hay que elegir las palabras, símbolos o imágenes precisas. Se podría decir que, de alguna manera, describir una idea consiste en dibujarla (hacer un boceto de ella) con palabras. Una vez que tenemos varias ideas descritas, podemos engarzar unas con otras y hacer construcciones de pensamiento. A esta actividad la llamamos pensar o reflexionar. Cuando estamos entrenando a alguien en pensar, es muy importante asegurarse de que, primero, entienda bien la diferencia entre opinar sobre algo y reflexionar sobre algo. No se trata de cacharrear por cacharrear. Se trata de entender lo que tenemos alrededor y disfrutar entendiéndolo. Lo malo es para enseñar todo esto se necesita tiempo, algo con lo que pocas veces cuentan los profesores de matemáticas. Cuando explico esto a mis amigas, siempre me contestan lo mismo: nosotras sí estamos dispuestas a dedicar tiempo a las matemáticas y tenemos, además, muchas ganas de hacerlo. Pero aún no hemos encontrado el cómo. Estas páginas están escritas para todas ellas, con la idea de darles pistas (ejemplos concretos) de cómo aprender matemáticas haciéndolas, mientras pasean con sus nietas y sus nietos por el Vivero Municipal de las Estufas del Retiro. Porque además de ganas de jugar con la cabeza, mis amigas tienen otra cosa en común: ejercen activamente como abuelas. Es posible que los cuatro ejercicios que plantearé no les resulten atractivos. Da lo mismo. Se trata de darles pistas de cómo mirar con gafas matemáticas el mundo, no de obligarlas a que miren con ellas las mismas cosas que miro yo.

¿Por qué los Viveros Municipales de las Estufas del Retiro? En el invierno de 2016, recibí una llamada de Sonia Tercero, amiga cineasta que estaba en plena realización de una serie de documentales sobre jardines. Aquella mañana, mientras visitaba el Vivero Municipal de la Estufas del Retiro con su director, Javier Spalla, había reconocido en una fotografía a mi bisabuelo Celedonio Rodrigáñez (a quien Sonía conocía como autor del Parque del Oeste). Comentó en voz alta ser amiga de una bisnieta de Rodrigáñez, y Spalla le contó que el recinto de Las Estufas se fundó como vivero y para centralizar talleres y cultivo de plantas del Ayuntamiento, en 1887, gestionado por Celedonio. Según parecen indicar los documentos encontrados hasta el momento, Celedonio fue, además de su primer director, responsable de su creación. Yo nunca había oído siquiera mencionar la existencia de Las Estufas (como se conoce en Madrid al Vivero Municipal del Retiro), y mucho menos sabía de su relación con mi bisabuelo. Tanto la historia como la entusiasta descripción que del lugar me dió Sonia, despertaron mi curiosidad. En unos días, acompañada por unos cuantos amigos (entre los que se encontraban la propia Sonia y Jaime Rodrigáñez, nieto de Celedonio e hijo de Eduardo), visité el lugar.

Todo lo que vi y escuché de los labios de nuestro guía (el propio Javier Spalla tuvo la generosidad de enseñarnos el recinto) despertó mi entusiasmo. Las Estufas (cuya historia puede leerse en la página web del vivero, incluida en la del Ayuntamiento del Madrid) abastecen de plantas de flor al Parque del Retiro y a muchos otros parques, jardines, zonas verdes y edificios ligados al Ayuntamiento de la ciudad. Sus instalaciones están cargadas de historia, arte y cultura botánica. Muchos de los invernaderos, de gran valor arquitectónico e histórico y muy hermosos, fueron regalados por sus antiguos dueños. En las Estufas se les restauró y se les puso de nuevo en funcionamiento. Además, por todas partes hay geometría interesante: en las formas de la naturaleza, en las de la arquitectura,... Y, por si fuera poco, las investigaciones que se siguen llevando a día de hoy en los distintos sistemas de cultivos, nos ofrecen un ejemplo de primera mano de qué y cómo se investiga en ciencia.

Al terminar nuestra visita, recorrí el Retiro de Sur a Norte charlando con Marta Carral (que estudió Jardinería y Paisajismo en la escuela de Leandro Silva, maestro también de Javier Spalla) y Narelle Jubelin (artista australiana afincada en España, cuyo padre tiene un jardín-museo de cactus y crasas en Sydney) sobre Las Estufas y Celedonio Rodrigáñez. De forma natural pasamos a su hijo Eduardo y sus clases de matemáticas paseando, precisamente, por el mismo parque que atravesábamos, y comentamos lo bien que le habrían venido aquellos paseos a mis sobrinos Tristán o Nelson (hijo de Narelle). Al haber tenido siempre malos profesores de matemáticas, ninguno de los dos ha conseguido todavía disfrutar con ellas. Una cosa llevó a la otra, y allí mismo decidí pensar un paseo matemático por las Estufas de Celedonio, en el espíritu de los paseos por el Retiro con su hijo Eduardo.

El tío Eduardo vivía frente al Retiro, en la misma casa que había alquilado su padre para poder ir al trabajo andando (como Director de Parques y Jardines de Madrid, Celedonio tenía su despacho en la Casa de Fieras del Retiro). De niña me llevaba con frecuencia de paseo por el parque y, mientras me iba señalando los plátanos y castaños de Indias más hermosos, o el tronco liso del árbol de Júpiter —*lagerstroemia índica*—, con sus flores lilas, me hablaba de Arquímedes, Eratóstenes, Tolomeo y Desiderio Papp, enseñándome, como quien no quiere la cosa, a mirar los árboles y las estrellas. Mis preguntas le daban pistas de lo que a mí más me gustaba y, por eso, con el tiempo fue poco a poco sustituyendo los relatos de la física y la astronomía por relatos matemáticos, y hablándome de Poincaré, Riemann, Kovaleskaia, Germain, los Noether(padre e hija), los Bernouilli y Russell. El que yo creciese permitió cambiar también el itinerario de nuestros paseos, y muchas veces tomábamos el autobús 21, arriba de la calle Goya, y, tras atravesar la ciudad de un extremo a otro siguiendo la dirección del Sol, como gustaba él recordarme, nos bajábamos frente al Parque del Oeste. Habiendo sido construido por su padre (sobre un vertedero y contratando tan sólo gente que estaba en el paro) el tío Eduardo también lo conocía bien.

De esta manera y a lo largo de los años, desde que yo tenía poco más de tres hasta que cumplí los doce o catorce, en que ya entrábamos a saco desde el primer momento en las matemáticas, fuimos pasando de los árboles y las estrellas a la geometría básica de las figuras, y de la geometría de las figuras a las matemáticas más abstractas. El material de estas páginas, recoge el espíritu de aquellas lecciones que recibí mientras paseábamos por el Retiro, y supone un ejemplo concreto de cómo aprender a pensar pensando. La única manera de aprender a hacer algo es haciéndolo. No se trata de primero aprender de memorieta unas cuántas reglas lógicas y luego ponerlas en práctica: se trata de aprender a reflexionar reflexionando. Eso, precisamente, es lo que a mí me ofrecieron de niña y lo que yo a mi vez ofrezco en este material: una actividad muy concreta —conocer el Vivero Municipal de Las Estufas del Retiro de Madrid— a la que se puede dedicar el tiempo que se quiera, y con la que nos podemos ejercitar en el pensar a la vez que aprendemos sobre el mundo que nos rodea y sobre algunas de las herramientas que, como especie, hemos construido a lo largo de los siglos para describirlo con precisión. Y todo ello relajadamente, jugando y sin agobios.

Tanto el lugar elegido como los ejercicios que describiremos, no son más que ejemplos de cómo podemos entrenar(nos) a pensar científicamente si contamos con tres cosas: un lugar que observar mientras paseamos por él, ganas de disfrutar jugando con ideas, y alguien con quien nos apetezca compartir nuestras reflexiones y juegos mentales. En mi caso, mientras diseñaba este paseo me han acompañado las trece personas más jóvenes de mi entorno cercano. Sus edades van desde los catorce años de Vera a los siete meses de Catalina. Mantener mis preguntas y reflexiones en el marco de una conversación (presente o futura, real o imaginada) con semejante tropa, además de hacerme las cosas más fáciles (es más fácil dirigirse a alguien a quien conoces y quieres que a un público desconocido), garantizará que las matemáticas se mantengan siempre a un nivel tan asequible como variado.

La idea es que quien quiera que lea este material lo utilice como se utiliza una guía turística durante un viaje: la guía sugiere unos recorridos básicos entre los muchos posibles, que cada cual puede adaptar, enriquecer o reconstruir según sus necesidades, condiciones y gustos. Desde seguir mis sugerencias al pie de la letra hasta construirse los propios recorridos, las posibilidades son infinitas.

> «El mejor juguete: la cabeza. El mejor juego: pensar. El mejor regalo: una buena idea» (Joaquín Rodriguez Gran, 'Dodot', humorísta, 1988).

Me gustaría acabar esta introducción con algunas observaciones.

Observación 1. Al diseñar estos itinerarios, he tenido la cuenta que las personas concretas con que yo voy a acercarme (mentalmente) a las Estufas, son 'gente pequeña' (i.e., de menos de quince años) viviendo en una ciudad muy grande, en la que tienen que aprender a ubicarse y moverse. Por eso, he introducido una actividad inicial para hacer antes de salir de casa, que reproduce lo que de niña hacía con mi madre: se trata de ubicar con toda precisión en el plano de Madrid el lugar al que queremos ir (los Viveros Municipales, en este caso) y diseñar nuestro viaje. Lo haremos construyendo mapas y gráficas con los que estudiar nuestros itinerarios. Según edades y gustos, los mapas y gráficas se harán con unos u otros materiales. Si estamos con adolescentes, por ejemplo, los dibujaremos en un cuaderno. Pero si estamos trabajando con gente chica, será más adecuado trazarlos con cuerdas atadas a chinchetas en la pared marcando los lugares sobre círculos de cartulina fijados con pinzas, trazarlos con tiza en una pizarra[3] o dibujarlos con rotuladores sobre papel sujeto a la pared con chinchetas.

Observación 2. Durante el paseo por las Estufas, nuestras actividades fundamentales serán observar, reflexionar en voz alta con quien sea que vayamos y hacer dibujos y esquemas en un cuaderno. Los únicos materiales que necesitaremos para ello, una vez estemos allí, serán tiempo, papel, lápiz, un trozo de cordel y una cinta métrica.

Observación 3. Buscamos *ver* con los ojos de la mente, encender el interruptor, sentir el *¡Eureka!* —que significa, literalmente, ¡lo encontré!— de Arquímedes. Nuestro objetivo será practicar (que es la única manera de aprender) los rudimentos del pensar abstracto, haciendo funcionar simultáneamente los ojos y la cabeza, y nada más que los ojos y la cabeza. *Miraremos y reflexionaremos sobre lo que veamos, evitando hacer interpretaciones sobre lo que se vea*. Es muy importante insistir en que no se trata de *opinar* sino de *pensar*: no es lo mismo elaborar una versión personal de la información que elaborar un listado de opiniones sobre los temas más diversos. Así pues, no buscamos acumular un montón de datos para poder opinar, sino aprender a pensar y razonar sobre lo que vemos. En nuestros paseos por Las Estufas contaremos, mediremos y relacionaremos, pero lo haremos de una manera *científica*. No se trata pues, tampoco, de echar cuentas por echar cuentas, de medir por medir, ni de relacionar por relacionar. Para pensar bien de una manera matemática, no basta con conocer el manejo de números y medidas y saber establecer relaciones. Se necesita también aprender a distinguir cuándo resulta adecuado y cuándo no resulta adecuado utilizar números o medidas, y cuándo se puede y cuándo no se puede establecer relaciones entre las cosas.

Observación 4. Conocer un vivero, como conocer un parque, un jardín o una ciudad, supone prestar atención antes o después al trazado de sus caminos y calles, y esto implica estudiar las figuras geométricas.

[3] Existen también botes de pintura que transforman cualquier puerta de madera en una magnífica pizarra.

Al llegar ante cualquier estructura o trazado triangular podemos parar, tomar un descanso en el paseo y, como hacía conmigo mi tío Eduardo, estudiar qué es un triángulo, qué propiedades tiene un triángulo, cuáles son las posiciones relativas de dos triángulos, etc., y luego retomar el recorrido incorporando en el equipaje todo lo aprendido sobre triángulos.

En el caso concreto de las Estufas del Retiro, la arquitectura de los invernaderos ofrece un riquísimo catálogo de figuras geométricas. Y lo mismo ocurre con las cajoneras, maceteros y demás artilugios que encontramos por doquier. Incluso la guerra biológica contra los pulgones que atacan a las distintas flores nos lleva a pensar geométricamente: las cestas semi-esféricas en que se coloca el centeno infectado con pulgones que sólo atacan a las gramíneos (llamado *Aphid Banker Plant*), o las escotillas perfectamente circulares que avispas microscópicas abren en las momias de estos pulgones, son herramientas fascinantes con las que aprender geometría esférica.

Javier Spalla y Jaime Rodrigáñez en las Estufas, tras una cesta de sujeción de un *Aphid Banker Plant*.

2. Preparando la visita al Vivero Municipal de las Estufas del Retiro

(Pensando en Vera y Manuel Rodrigáñez Sánchez-Vallejo y sus paseos entre el Retiro y la Puerta del Sol)

El Vivero Municipal de las Estufas se encuentra en el Parque del Retiro de Madrid. Antes de visitarle, planearemos la excursión. Para ello, lo primero que necesitamos es conocer nuestro destino.

Etapa 1: Ubicar en la ciudad el Parque del Retiro.

Materiales necesarios: Plano de Madrid que incluya líneas de autobuses y metro, gráfica del metro de Madrid, papel y lápiz.

Desplegamos el plano de Madrid sobre la mesa del comedor.

Preguntas:
- ¿Sale el Sol siempre por la misma dirección?
- ¿Cómo se llama la dirección por la que sale el Sol?
- ¿Dónde está la dirección Este en este plano?
- ¿Cómo se llaman las otras tres direcciones?
- ¿Dónde están el Norte, el Sur y el Oeste en el plano?
- ¿Qué edificio o lugar elegirías para representar el Norte de Madrid?
- ¿Qué edificio o lugar elegirías para representar el Sur de Madrid?
- ¿Qué edificio o lugar elegirías para representar el Oeste de Madrid?
- ¿Qué edificio o lugar elegirías para representar el Este de Madrid?
- ¿Qué palabra se utiliza para indicar que algo está entre al Norte y al Este?
- ¿Qué palabra se utiliza para indicar que algo está entre al Norte y al Oeste?
- ¿Qué palabra se utiliza para indicar que algo está en entre al Sur y al Este?
- ¿Qué palabra se utiliza para indicar que algo está entre al Sur y al Oeste?
- Busca en el plano: el río Manzanares; los Museos del Prado y Reina Sofía, el Museo de Ciencias Naturales del CSIC, el Museo Antropológico, la Biblioteca Nacional y la Ermita de San Antonio de la Florida; la Casa de Campo, el Parque del Oeste, la Dehesa de la Villa y el Jardín Botánico. ¿Dirías que están situados exactamente al Norte, al Sur, al Este o al Oeste? ¿Dirías que están al Noreste, al Sureste, al Noroeste o al Suroeste?

Paso 1: Busca en el plano de Madrid las calles Paseo de la Castellana, Paseo de Recoletos y Paseo del Prado. Despliega, a continuación, la gráfica de la red del Metro de Madrid. Coloca ambos pliegos de papel, uno junto a otro, sobre la mesa del comedor.

Preguntas:

- Busca las Plaza de Castilla y la Plaza de Gregorio Marañón en el plano de Madrid. ¿Qué líneas de autobuses unen ambas plazas?
- Fíjate en el trazado de la calle Paseo de la Castellana en el tramo que une ambas plazas en el plano de Madrid, y reprodúcelo en tu cuaderno.
- Busca las paradas más cercanas a la Plaza de Castilla y la Plaza de Gregorio Marañón en la gráfica de la red del metro. ¿Qué línea de metro une ambas paradas?
- Fíjate en el trazado de esta línea en la gráfica del metro, en el tramo que va desde Plaza de castilla hasta Gregorio Marañón, y reprodúcelo en tu cuaderno. Compáralo con el que hiciste del Paseo de la Castellana. ¿Tienen la misma forma?
- Busca en la gráfica de la red del Metro las paradas Sol, Tirso de Molina y Antón Martín. ¿Qué línea une estas tres paradas? ¿Qué forma tiene en la gráfica esta línea en este tramo?
- Busca la Puerta del Sol y las plazas de Tirso de Molina y Antón Martín en el plano de Madrid. Dibuja sobre el plano una línea recta que una la Puerta del Sol con la Plaza de Antón Martín. ¿Pasa esa línea por la Plaza de Tirso de Molina?

- Basándote en estos dos ejemplos, ¿qué diferencia piensas que hay entre un plano y una gráfica?

Como ejemplo del tipo de modificaciones que se pueden hacer a nuestra propuesta, daremos dos opciones para terminar esta primera etapa. La opción (A) es para quienes están aprendiendo los números y a escribir. Los materiales que necesitaremos, además del plano de Madrid, la gráfica del metro, papel y lápiz, serán cordel, cartulina (o papel reciclado), tijeras para papel, pegamento, chinchetas y pinzas. La opción (B) es para quienes manejan ya con soltura los números y las letras. En esta segunda opción usaremos sólo cuaderno y lápiz (o lápices de colores, como se quiera). En el resto de las etapas, mezclaremos todos los niveles y materiales, y que cada cual elija o adapte lo que más le apetezca.

Opción A: Para Ana, Catalina, Carmen, Ibai, Lola y Lucas.

Paso 2: Recorta círculos de cartulina, numéralos del 1 al 12, y en cada uno escribe los nombres de las plazas y puentes entre la Plaza de Castilla y la de Carlos V, también conocida como *Atocha*, por el orden en que aparecen listados a continuación (que es el orden en que aparecen en el plano). En los cartones 1 y el 12, escribe también las palabras 'NORTE' y 'SUR', respectivamente.

1. NORTE: Plaza de Castilla; 2. Plaza de Cuzco;
3. Plaza de Lima; 4. Nuevos Ministerios;
5. Plaza de San Juan de la Cruz; 6. Plaza de Gregorio Marañón;
7. Glorieta de Emilio Castelar; 8. Puente de Mata Gorostizaga (o Rubén Darío);
9. Plaza de Colón; 10. Plaza de Cibeles;
11. Plaza de Cánovas del Castillo (o Neptuno); 12. SUR: Plaza de Carlos V (o Atocha)

Preguntas:

Has escrito sobre 12 cartones. ¿Qué palabra se utiliza para describir 12 cosas?

¿Cuántas cosas conoces que se cuenten por docenas?

¿De cuánto en cuánto se suele contar?

¿Por qué crees que solemos contar de diez en diez?

Cuando leemos las horas en un reloj, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Cuando dividimos una hora en minutos, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Cuando dividimos el día en horas, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Cuando dividimos las semanas en días, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Cuando dividimos el año en meses, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Cuando contamos los años por siglos, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Paso 3: Pega los cartones a pinzas de la ropa. Extiende un trozo largo de cordel en la pared y fija sus extremos con dos chinchetas. Ve colocando los cartones con las pinzas sobre el cordel siguiendo el orden indicado por los números. (Esta actividad se puede llevar a cabo de muchas maneras, según la edad y conocimiento de los números que vayan teniendo las niñas. Se puede empezar dando pistas; por ejemplo, colocando algunos de los cartones sobre el cordel —los numerados con números pares, los impares, el 1, 5 y 10, etc.—, pedir a las niñas que pongan el resto, e ir poco a poco haciendo la actividad más difícil.)

Paso 4: Recorta dos círculos de cartulina, y escribe en uno de ellos 'ESTE: Plaza de las Ventas' y en el otro 'OESTE: Parque del Oeste'. Pega los círculos sobre pinzas de la ropa. Fija un trozo de cordel sobre la pared de manera que corte perpendicularmente al eje Norte-Sur en la Plaza de Colón. Coloca en sus extremos las pinzas con los cartones de las direcciones Este y Oeste. Ya tenemos sobre la pared una gráfica de la ciudad de Madrid.

Paso 5: Busca el río Manzanares en el plano de Madrid y fíjate bien en su recorrido. Fija con chinchetas en la gráfica de pared un trozo de cordel reproduciendo el trayecto del Manzanares a su paso por la ciudad.

Paso 6: Identifica sobre la gráfica de la pared dónde está el Retiro y haz una marca. Recorta un círculo de cartulina, escribe en él 'Parque del Retiro' y fíjalo con una chincheta sobre la marca que acabas de hacer.

Opción B: Para Ander, Ismael, Lucía, Manuel, Nelson, Tristán y Vera.

Paso 2: Traza una línea recta en el cuaderno, y marca doce puntos en ella. Numéralos del 1 al 12, y en cada uno escribe, por su orden según aparecen en el plano, los nombres de las plazas y puentes entre la Plaza de Castilla y la de Carlos V.

1. NORTE: Plaza de Castilla; 2. Plaza de Cuzco; 3. Plaza de Lima; 4. Nuevos Ministerios;
5. Plaza de San Juan de la Cruz; 6. Plaza de Gregorio Marañón; 7. Glorieta de Emilio Castelar;
8. Puente de Mata Gorostizaga (o Rubén Darío); 9. Plaza de Colón; 10. Plaza de Cibeles;
11. Plaza de Cánovas del Castillo (o Neptuno); 12. SUR: Plaza de Carlos V (o Atocha)

En los puntos numerados con el 1 y el 12, además de escribir Pl. de Castilla y Pl. de Carlos V, escribe también las palabras NORTE y SUR, respectivamente.

Preguntas:
- ¿Cuál es la diferencia entre una plaza y una glorieta? Busca ambas palabras en un diccionario, lee su significado en voz alta y explícalo con tus palabras.
- Hemos escrito 12 cartones. ¿Qué palabra se utiliza para describir 12 cosas?
- ¿Cuántas cosas conoces que se cuenten por docenas?
- ¿De cuánto en cuánto se suele contar?
- ¿Por qué crees que solemos contar de diez en diez?
- Cuando leemos las horas en un reloj, ¿de cuánto en cuánto contamos?
- Cuando dividimos una hora en minutos, ¿de cuánto en cuánto contamos?
- Cuando dividimos el día en horas, ¿de cuánto en cuánto contamos?
- Cuando dividimos las semanas en días, ¿de cuánto en cuánto contamos?
- Cuando dividimos el año en meses, ¿de cuánto en cuánto contamos?
- Cuando contamos los años por siglos, ¿de cuánto en cuánto contamos?

Paso 3: Traza en el cuaderno una línea recta que corte perpendicularmente al eje NORTE-SUR en la Plaza de Colón. Escribe en sus extremos, asegurándote de elegir bien dónde escribís el qué, las palabras ESTE: Plaza de las Ventas y OESTE-Plaza de Colón.

Paso 4: Busca el río Manzanares en el plano de Madrid, fíjate bien en su recorrido y reprodúcelo en el cuaderno.

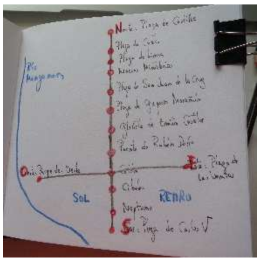
Paso 5: Quienes vivimos en Madrid, cuando decimos 'voy al centro' queremos decir 'voy a algún lugar cercano a la Puerta del Sol'. De hecho, la plaza de la Puerta del Sol se considera desde 1950 el punto de partida, o kilómetro cero, de las carreteras radiales españolas.

Preguntas:
- Busca la Puerta del Sol en el plano de Madrid. ¿Está en el centro de la ciudad?
- Busca la parada 'Sol' en la gráfica del metro de Madrid. ¿Está en el centro de la gráfica?
- Busca la palabra 'radial' en el diccionario y lee en voz alta todos sus significados. ¿Qué piensas que significa la expresión 'el punto de partida, o kilómetro cero, de las carreteras radiales españolas'?
- Entérate (pregunta a alguien que lo sepa, o búscalo en alguna enciclopedia) de cuál es el centro geográfico de la Península Ibérica.

- Busca la palabra 'centro' en el diccionario, y lee en voz alta todos sus significados. ¿Hay alguno de ellos que explique que, a pesar de no estar en el centro físico de la ciudad, ni el centro geográfico de la Península Ibérica, a la Puerta del Sol se la considere el centro de Madrid y el kilómetro cero de las carreteras radiales españolas?
- Busca el Retiro en el plano de Madrid. ¿Dónde dirías que está situado respecto a la Puerta del Sol: al Norte, al Sur, al Este, al Oeste, al Noreste, al Sureste, al Noroeste o al Suroeste?

Paso 6: Busca en el plano que has hecho en el cuaderno dónde estarían el retiro y la Puerta del Sol, y escribe las palabras 'Retiro' y 'Sol en los lugares correspondientes.

Ya tenemos un mapa de Madrid en el cuaderno, con dieciséis lugares marcados en él: doce en el eje NORTE-SUR, dos más en el eje ESTE-OESTE, el Retiro y La Puerta del Sol.



Una vez que ya tenemos ubicado el Retiro en la ciudad, repasaremos su geografía, para no perdernos por él.

Etapa 2º: Estudiando el plano del Retiro

Paso 7: Despliega, una vez más, el plano de Madrid y busca de nuevo el Parque del Retiro. Fíjate bien en su forma y dibújala en tu cuaderno (se trata de un ejercicio de cambio de escala, y por eso es importante).

Preguntas:
- ¿Cuántos lados tiene el Parque?
- Busca en el diccionario el significado de la palabra 'polígono', lee en voz alta su significado y explícalo con tus propias palabras.
- ¿Cómo se llama un polígono que tiene cinco lados?[1] ¿Cómo se llaman las esquinas de un polígono?

Paso 8: (Otro ejercicio de cambio de escala) Reproduce sobre la pared con cordel y chinchetas, y todo lo grande que puedas, la forma pentagonal del Retiro. Recorta cinco círculos de cartulina y

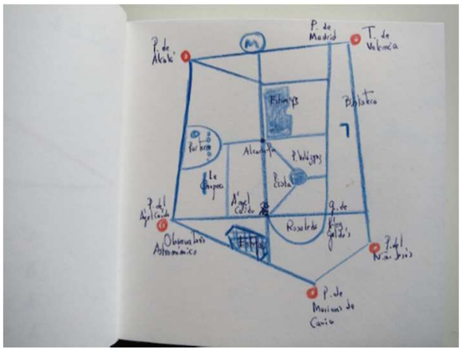
[1] Aquí puede hacerse una parada en el recorrido y estudiar, todo el tiempo que se quiera, polígonos.

escribe en ellos Puerta de Alcalá, Torre de Valencia, Plaza del Niño Jesús, Plaza de Mariano de Cavia y Observatorio Astronómico, respectivamente (si tienes una pizarra más grande que tu cuaderno, o una pared o puerta pintada de negro con pintura de pizarra, puedes sustituir cordel, chinchetas y cartulina por tiza). Pégalos sobre pinzas, y colócalos en sus vértices correspondientes en el pentágono sobre la pared. Escribe también estos nombres en los lugares correspondientes de tu dibujo en el cuaderno.

<u>Paso 9</u>: Busca en el plano la Puerta de Madrid (que es la entrada al Paseo de Coches del Retiro desde la calle O'Donell) y la Puerta del Ángel Caído (junto al Observatorio Astronómico, en la calle Alfonso XII). Marca los puntos correspondientes en la gráfica de la pared y haz cruces en el dibujo del cuaderno. Sigue el trazo del Paseo de Coches en el plano a lo largo de su recorrido desde la Puerta de Madrid hasta la Puerta del Ángel Caído. Reprodúcelo con cordel y chinchetas en la gráfica de la pared y dibújalo también en el cuaderno. Recorta cuatro círculos de cartulina, escribe sobre ellos Puerta de Madrid, Glorieta de Pérez Galdós, escultura del Ángel Caído y Puerta del Ángel Caído, pégalos sobre pinzas de la ropa y colócalos en los lugares adecuados de la gráfica de la pared. Escribe también los nombres en tu mapa del cuaderno.

<u>Paso 10</u>: Busca en el plano del Retiro la boca de la parada de metro 'Retiro', el Estanque, el Parterre, la Chopera, el Palacio de Velázquez, el Palacio de Cristal, la Rosaleda y el Vivero Municipal de las Estufas. Marca la posición de cada uno de ellos en la gráfica de la pared y en el mapa del cuaderno.

<u>Paso 11</u>: Recorta ocho círculos de cartulina, escribe sobre ellos 'Metro (L2: Retiro)', 'Estanque', 'Parterre', 'Chopera', 'Palacio de Velázquez', 'Palacio de Cristal', 'Rosaleda' y 'Las Estufas', y pégalos sobre pinzas de la ropa. Utilizando cordel y chinchetas, reproduce en la gráfica los caminos que aparezcan en el plano y que lleven a esos sietes lugares, colocando las pinzas con los cartones en los lugares correspondientes. Completa también con caminos el mapa del cuaderno.



Etapa 3º: Algo de la historia del Parque del Retiro

Madrid se edificó en el centro de un bosque enorme y muy tupido, como ilustra el siguiente relato.

Paso 12: Lee en voz alta el siguiente texto.

> «Pero lo que es más concluyente y manifiesta con más claridad que el bosque llegaba hasta los mismos muros de la población, y que su espesura era grandísima, es el hecho tan conocido en que Isabel la Católica estuvo á punto de perecer en las inmediaciones de la ermita de San Isidro. Cuenta la fama y la historia refiere, que entre los muchos osos que entonces pululaban por los contornos de la Villa, había uno de tan extraordinarias proporciones que era el espanto de toda la comarca; no sólo era temido de los cazadores, sino también de los vecinos, pues abandonaba con frecuencia la fragosidad del monte, llenando de terror á cuantos pasaban el río, y aún á los mismos habitantes del barrio, que todavía se conoce con el nombre de la Morería. Los Reyes Católicos determinaron dar una batida con verdaderos honores de batalla, disponiendo las cosas de modo que el fiero animal saliera á la orilla del río, ó á los puntos menos poblados, para poder perseguirlo mejor y con más seguridades de éxito. El ojeo había comenzado muy temprano, y cuando la reina empezaba á internarse en la parte montañosa, saliendo de un bosquete al lado de la fuente hoy consagrada a San Isidro, la hostigada fiera se avalanzó sobre Isabel, que á no ser por su serenidad hubiera perecido en aquel lance. La reina de Castilla dió muerte por su propia mano al temible enemigo, noticia que recibió con gran algazara el pueblo, que contemplaba la montería desde los adarves de la Villa» (Celedonio Rodrigáñez, *El arbolado de otros tiempos*, en 'El arbolado de Madrid', Imprenta Municipal 1888).

Preguntas:

- ¿En qué se diferencian un bosque, un parque, un jardín y un invernadero? ¿En qué se diferencian un vivero y un invernadero? Busca las cinco palabras en un diccionario, lee en voz alta su significado, y explícamelo con tus propias palabras.
- ¿Qué cosas podemos encontrar en un parque, pero no en un jardín, ni en un bosque, ni en un invernadero?
- ¿Cuántos tipos de parques conoces, aunque sea sólo de oídas?
- ¿Qué diferencia hay entre un parque público y un parque privado?

En sus escritos, Celedonio Rodrigáñez se refiere siempre al Parque del Retiro como Parque de Madrid, su nombre oficial todavía hoy, "no fuesen los monarcas a caer en la tentación de recuperarlo", escribe. Porque el Parque de Madrid se construyó entre 1633 y 1640 como jardín de recreo de la monarquía alrededor de un palacio, llamado del Buen Retiro, que hoy ya no existe. Este palacio estaba en las afueras de la ciudad y los reyes lo utilizaban como lugar de descanso y retiro (de ahí su nombre). En aquella época, en toda Europa la responsabilidad de mantener a los artistas y creadores estaba pasando de la Iglesia Católica (que se había encargado de darles trabajo durante el medievo) a los reyes. La corte de pintores, escritores, músicos e intelectuales a los que subvencionaba la monarquía española se reunía en el Palacio Buen Retiro y sus jardines. Los cuadros que se fueron acumulando allí, acabaron siendo la colección con la que años después Isabel de Braganza, esposa de Fernando VII, inauguró la pinacoteca del Prado.

Isabel de Braganza colocó la pinacoteca en un edificio que había empezado a construir en 1785 el arquitecto Juan de Villanueva, por encargo de Carlos III, con la idea de que albergase un Museo de Ciencias. Por eso las salas del Prado son chiquitas y oscuras: fueron pensadas como laboratorios, no para exponer cuadros.

Paso 13: Lee en voz alta el siguiente texto.

> «Retirados los franceses, visto que el proyectado Museo de Ciencias no podía formarse y que la parte del edificio construida llegaría á derruirse si no se terminaba la obra, reunióse á duras penas crédito para ello. Gracias á los esfuerzos de la reina doña María Isabel de Braganza, que cedió la pensión que por *razón de alfileres* tenía consignada sobre la renta de correos; gracias al incesante anhelo con que dicha señora procuraba inculcar en el ánimo de los Ministros la necesidad perentoria de destinar importantes sumas al objeto indicado, pudo verse realizado un pensamiento que hoy es la admiración de cuantos visitan la corte. Se abrió al público el 13 de Noviembre de 1819, pero sólo con tres salas" (*Las calles de Madrid*, Peñasco y Cambronero 1889, pág. 394).

El día de Nochebuena de 1734, un incendio destruyó el Alcázar, donde vivía la familia real, que tuvo que trasladarse al Palacio del Retiro. El que la familia Real viviese allí durante los treinta años que se tardó en construir el Palacio de Oriente fue muy bueno para el Parque, porque se le cuidó mucho.

Preguntas:

- ¿Qué significa la palabra Oriente?
- ¿Qué significa la palabra Occidente?
- Busca la Plaza de Oriente y el Palacio Real en el plano de Madrid. ¿En qué dirección están?
- Si el Palacio de Oriente está a Oeste, ¿es lógico que se le llame Palacio de Oriente?

El último de los reyes en vivir allí fue Carlos III, que mandó construir la Real Fábrica de Porcelana del Buen Retiro (1760), la Puerta de Alcalá (arquitecto Francesco Sabatini, 1778) y el Observatorio Astronómico (arquitecto Juan de Villanueva, 1790).

Preguntas:

- ¿Por qué a la Puerta de Alcalá se le llama así aunque no esté en ninguna pared? Dibújala en el cuaderno.
- ¿Cuántas puertas hay en la Puerta de Alcalá?
- ¿Cuántos arcos hay en la Puerta de Alcalá?

En 1764, la familia real se trasladó al Palacio de Oriente, y el Palacio del Retiro se fue descuidando, pero no sus Jardines, que se siguieron arreglando y mejorando. Cuando en 1868 la Reina Isabel II fue destronada, el Retiro —con el nombre de 'Parque de Madrid'— pasó a ser propiedad del Estado y, poco tiempo después, del Municipio de Madrid.

Inicialmente, los jardines iniciales tenían dos estanques (el Estanque Grande y el de las Campanillas, que entonces se llamaba Ochavado), y un río, el Río Grande. El Río Grande discurría por el Paseo de Coches, y tenía una isla donde primero estuvo la ermita de San Antonio de los Alemanes, luego la Real Fábrica de Porcelanas del Buen Retiro (conocida popularmente como la Fábrica de la China) y, finalmente, se colocó la estatua del Ángel Caído.

Preguntas:
- ¿A qué número te recuerda la palabra Ochavado?
- ¿Ves en el plano algún estanque con ocho lados? ¿Dónde está?

Encontramos el estanque ochavado entre el Estanque Grande y el Parterre. En el Parterre, que se arregló en 1712, está 'el abuelo', el árbol más viejo del Parque y probablemente de todo Madrid. *El abuelo* es un ahuehuete (*Taxodium macronatum*), y pertenece a la familia de los Cipreses Calvos. A los Cipreses Calvos se les llama así porque pese a ser plantas coníferas tienen las hojas caducas y en el otoño se les caen. Sin embargo, el abuelo no pierde sus hojas en otoño. Sólo le cambian de color.

Preguntas:
- ¿Qué forma tiene un cono? Dibújala en tu cuaderno.
- ¿Por qué se llama así a las plantas coníferas?
- Busca en el diccionario la palabra 'caduca'. ¿Por qué se llaman así las hojas caducas?[2]

El abuelo, plantado en el Retiro por orden de Isabel II en 1850, es pariente de los Cipreses de los Pantanos, también Calvos, que son los árboles que salen del agua en el estanque frente al Palacio de Cristal[3]. En el Parterre también hay unos árboles más pequeños que se parecen mucho a los baobabs (árboles africanos que en Kenia dan cobijo a leones y personas), que crecían en el planeta del Pequeño Príncipe, el personaje del cuento de Saint Exúpery. Aunque los baobabs del parterre no sean baobabs de verdad sino cipreses, tienen unas ramas de textura suave y a la altura perfecta para encaramarse a ellas a leer cómodamente. Desafortunadamente, demasiada gente está hoy en día sin educar y, en consecuencia, es incapaz de encaramarse a un árbol sin romperse la crisma o hacer un grafiti en las ramas, dañando con ello tremendamente a los árboles. Por eso, subirse a los árboles del Retiro a leer está prohibido actualmente. Pero hasta hace unas décadas sí se podía, y me consta que varios de los mejores poetas madrileños se formaron como tales en las ramas de los falsos baobas del Parterre del Retiro.

[2] Aquí se puede hacer otra parada y estudiar la forma geométrica de distintas hojas de árboles, y las diferentes configuraciones que las hojas pueden formar, practicando la geometría de formas que se conozca.

[3] En 1887 se inauguró en el Parque la Gran Exposición de Filipinas, y para la ocasión se construyeron varios pabellones, de los que sólo quedan hoy los palacios de Cristal y de Velázquez, que, asociados al Museo Reina Sofía, se utilizan como salas de exposiciones.

El primer árbol de Retiro en florecer es el Árbol de Amor, que tiene las flores malvas. El tío Eduardo recogía del suelo las primeras en caer, las colocaba en un platito con agua. Así sabíamos que la Primavera estaba a punto de llegar.

Preguntas:

¿Cuándo llega la Primavera a Madrid?

¿De qué manera te enteras tú de que ha llegado la Primavera?

¿Cuándo llegan a Madrid las otras tres Estaciones?

¿De qué manera te enteras tú de que ha llegado el Verano, el Otoño o el Invierno?

Hasta hace no muchos años, en el Parque había una Casa de Fieras con fieras auténticas. Tan auténticas y tan fieras que, en julio de 1927, cuando mi abuelo y mi tío eran niños, un oso blanco mató a dentelladas a 'el Catalán', un amigo suyo que trabajaba allí como cuidador.

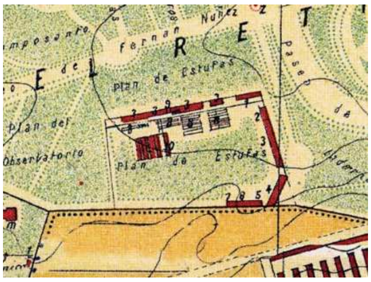
El Catalán dando de comer al oso blanco del Retiro.
Revista Nuevo Mundo.

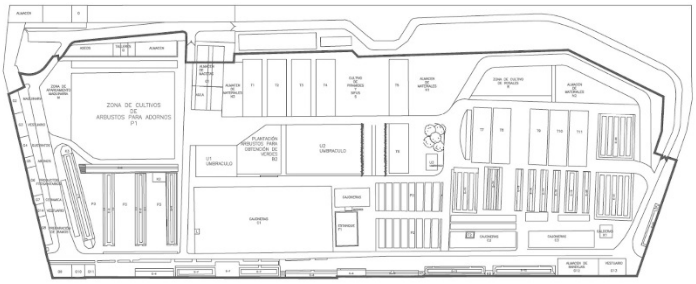
En 1972 se inauguró el Parque Zoológico de la Casa de Campo y se cerró la Casa de Fieras del Retiro. Desde entonces, las únicas fieras que viven en el Parque son los felinos del Monte de los Gatos. El Monte de los gatos está situado junto a la Puerta de Madrid , no muy lejos de unas ruinas románicas que se colocaron allí, no se sabe muy bien con qué criterio, desde que el Director de Parques y Jardines las rescató cuando iban a ser tiradas a la basura en la provincia de Segovia a finales del siglo XIX, y las llevó al Retiro.

Etapa 4ª: Estudiando el plano de las Estufas del Retiro

Paso 14: Busca, una vez más, los Viveros Municipales de las Estufas en el plano del Parque del Retiro. Estudia su forma y dibújala en tu cuaderno.

Al hacerlo, utiliza el polígono que pienses que mejor se acerca a su forma, y marca con una flecha la entrada al recinto.





Izq.: Plano de F. Cañada, h. 1900. Las Estufas dentro de un pentágono

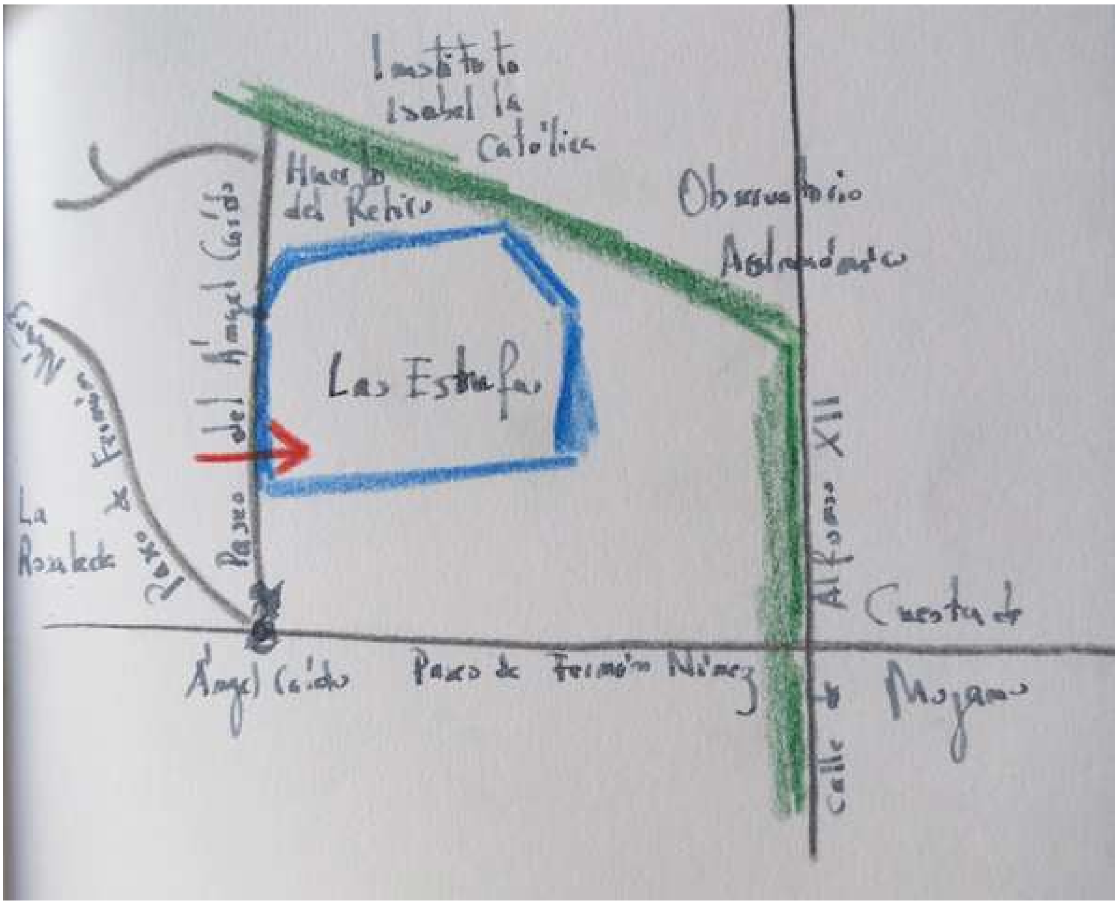
Dcha.: Plano del Ayuntamiento de Madrid, 2016. La Estufas dentro de un hexágono.

<u>Preguntas</u>:

- ¿Cuántos lados tiene el polígono que has usado para dibujar el recinto de las Estufas?
- ¿Cómo se llama un polígono con ese número de lados?
- ¿Cómo se llama un polígono en el que todos sus lados tienen la misma longitud y todos los vértices contienen un ángulo igual de amplio?
- La forma del recinto de Las Estufas, ¿es un polígono regular?
- ¿Cómo se llama un polígono de tres lados?
- ¿Cómo se llama un polígono de tres lados que es regular?
- ¿Cómo se llama un polígono de cuatro lados?
- ¿Cómo se llama un polígono de cuatro lados que es regular?

<u>Paso 15</u>: Reproduce el polígono de las Estufas primero sobre la pared (o pizarra), todo lo grande que pueda, con cordel y chinchetas, y luego en el cuaderno. Busca en el mapa de Madrid y el plano del Retiro, la Cuesta de Moyano, la calle de Alfonso XII y el Paseo de Fernán Núñez. Dibuja (con cordel y chinchetas en la pared, y con lápiz en el cuaderno) su recorrido cerca del Retiro.

Recorta cinco cartones, y escribe sobre ellos 'Observatorio Astronómico', 'Estatua del Ángel Caído', 'La Rosaleda', 'Instituto Isabel la Católica' y 'Huerto del Retiro'. Colócalos con chinchetas en sus lugares correspondientes en la gráfica poligonal sobre la pared, e identifica también dónde están en el mapa que acabas de dibujar en el cuaderno.


Instituto Isabel la Católica
Huerto del Retiro
Observatorio Astronómico
Paseo del Ángel Caído
La Rosaleda
Paseo de Fermín
Ángel Caído
Paseo de Fermín Núñez
Calle Alfonso XII
Cuesta de Moyano

3. Paseando por el Vivero Municipal de las Estufas del Retiro

Entramos en el Parque del Retiro por la Puerta del Ángel Caído, ubicada en la calle de Alfonso XII frente a la Cuesta de Moyano. Esta calle, a pesar de ser tan cortita, es uno de los lugares emblemáticos de Madrid.

Preguntas.
¿Cómo distinguirías con precisión las dos aceras de la Cuesta? (Una está al Norte, otra al Sur.)
¿En qué acera está el Mercado de Libros? (En la Norte)
¿En qué dirección mira el Mercado de Libros? (Mira al Sur)
¿Qué queremos decir cuando decimos que un edificio está orientado al Mediodía?
¿Por qué a la dirección Sur se le llama también Mediodía?

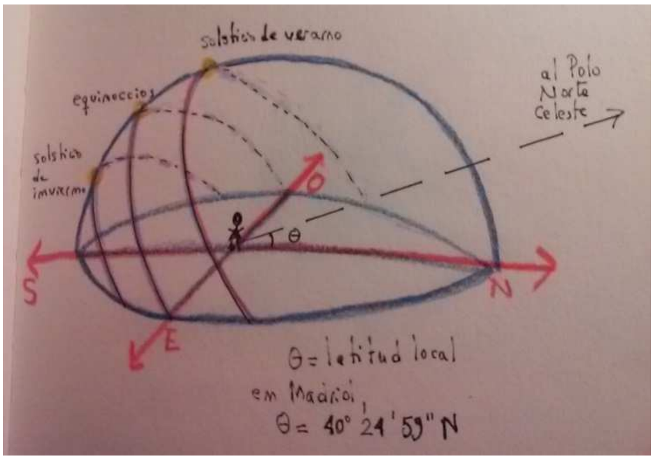
En 1925, el entonces alcalde de Madrid, el Conde de Vallellano, decidió organizar los mercados de la ciudad. En sus orígenes, el mercado de la Cuesta de Moyano tenía también puestos de fruta y muebles, que poco a poco fueron desapareciendo hasta quedar únicamente libros, y consistía en casetas de lona colocadas sobre la acera Sur. Los puestos miraban, pues, al Norte, que es la orientación más fría, porque en Madrid, cuando nos colocamos en una acera o ventana que esté orientada (mirando) al Norte, no nos da el sol.

(Nota histórica sobre el movimiento aparente del sol: Insertaremos de vez en cuando notas históricas. Su lectura no es necesaria para poder seguir el recorrido de las Estufas, se pueden saltar.

Hasta el siglo XVI, los atrónomos pensaban que el trayecto que vemos seguir al Sol en el cielo a lo largo del día, es el movimiento real del Sol en la esfera celeste. Gracias al matemático polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), desde el siglo XVI sabemos que es la Tierra la que, en el transcurso de un año, se mueve alrededor del Sol. El movimiento del Sol es, pues, aparente, no real. Debido a que la Tierra gira alrededor del Sol, y nosotros estamos sobre la Tierra cuando observamos el Sol, nos parece que es éste el que se mueve mientras que nosotros permanecemos quietos, pero no es así. Al tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol se le llama 'año astronómico'. Desde que sale hasta que se pone, el Sol traza cada día sobre el cielo un arco de movimiento aparente desde algún lugar en el Este, hasta algún lugar en el Oeste. Este arco se corta con el arco Norte/Sur a las exactamente a mediodía, a ls12:00 horas: pero empieza y acaba en puntos diferentes cada día: los puntos de salida y puesta de Sol cambian de un día para otro.

Hace siglos que los astrónomos descubrieron (combinando la observación con los cálculos matemáticos), que los puntos por los que vemos salir y ponerse el Sol en el hemisferio Norte, se van desplazando a lo largo del año de Oeste a Este en la dirección de las agujas del reloj, recorriendo distintas constelaciones de estrellas (en el hemisferio Sur, donde se ve al Sol en dirección Norte, se desplazan en dirección contraria)[1]. En consecuencia, el arco del movimiento aparente del Sol va cambiando de tamaño y posición sobre el cielo a lo largo del año. El tamaño mínimo lo alcanza en el 'solsticio de invierno' (sobre el 21 de diciembre) y el máximo en el 'solsticio de verano' (sobre el 21 de junio).

Resumen: Aunque sabemos que la Tierra se mueve alrededor del Sol, desde la Tierra parece que es el Sol el que se mueve de Este a Oeste alrededor de la Tierra. Esto es lo que llamamos movimiento 'aparente del Sol'. Varía de estación a estación, y varía aún más cuando el lugar de observación está a una latitud alta.



El día del solsticio de invierno, el Sol sale por el Sureste bastante cerca del Sur y se oculta por el Suroeste, también bastante cerca del Sur. Es el día más corto del año en Madrid y el resto del hemisferio Norte (y el más largo en el hemisferio Sur). A medida que el año astronómico va avanzando, este arco se va haciendo más grande, hasta que llega el solsticio de verano, el día más largo del año. A partir del solsticio de verano, el arco comienza a estrecharse de nuevo, hasta volver a su extensión mínima el día del solsticio de invierno siguiente. Hay dos únicas ocasiones al año en que el Sol sale exactamente por el Este y se oculta exactamente por el Oeste, y el día es igual de largo que la noche. Se les llama 'equinoccios'.

[1] No tenemos más que ir regularmente a algún lugar con poca polución y observar con atención a través de un telescopio (no hace falta que sea muy sofisticado), para comprobar que la salida y la puesta del Sol no se producen todos los días sobre el mismo fondo de estrellas cada día, sino que, a lo largo de un año, este fondo va cambiando.

Así pues, en el hemisferio Norte, que es el hemisferio en el que está Madrid, la situación del Sol en las ocho distintas orientaciones durante las cuatro estaciones es la siguiente:

Sur:	El Sol da todo el día en invierno, primavera y otoño. En verano sólo en las horas centrales del día, cuando da más calor.
Sureste:	En invierno el Sol da todo el día. El resto del año sólo da hasta el mediodía.
Este:	El Sol da todo el año desde el amanecer hasta el mediodía.
Noreste:	En invierno no da el Sol. El resto del año sólo hasta mediodía.
Norte:	El Sol sólo da en verano, y sólo en las primeras horas de la mañana y las últimas de la noche.
Noroeste:	En invierno no da el Sol. El resto del año, desde mediodía hasta que se pone.
Oeste:	El sol da todo el año desde el mediodía hasta que se pone.
Suroeste:	En invierno el sol da todo el día. El resto del año, desde mediodía hasta que se pone.

Preguntas:

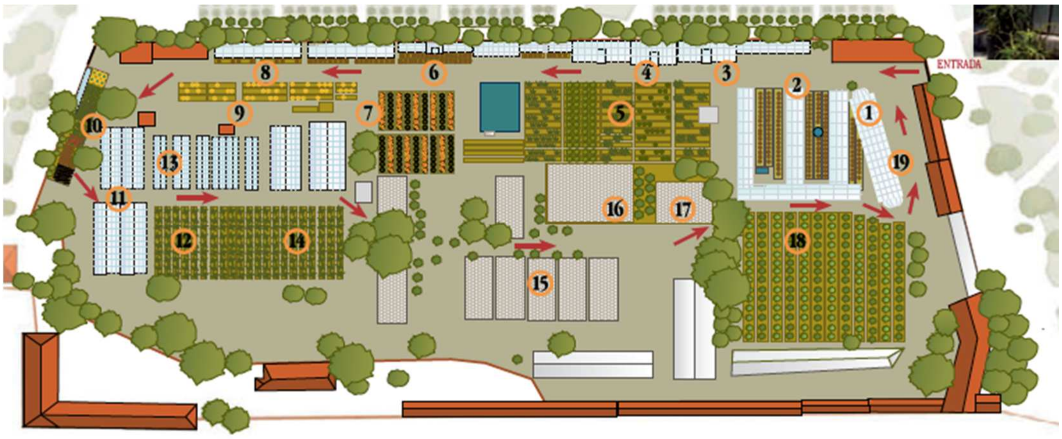
- Comprueba la orientación de las distintas ventanas de tu casa.
- Si quisieses poner en el alféizar de una ventana un tiesto con una planta que necesita mucha luz y nada de sol, ¿qué orientación sería la mejor?
- Si quisieses poner en el alféizar de una ventana un tiesto con una planta que necesita mucha luz y algo de sol pero no mucho, ¿qué orientación sería la mejor?
- Si quisieses poner en el alféizar de una ventana un tiesto con una planta que necesita mucha luz y mucho sol, ¿qué orientación sería la mejor?
- Define con tus propias palabras el día y la noche.
- Explica con tus propias palabras por qué la duración del día cambia de acuerdo a las estaciones.
- Explica con tus propias palabras por qué la distancia del Sol por encima del horizonte a la misma hora del día, varía con las estaciones.
- Explica con tus propias palabras por qué cuando las casetas de la Cuesta de Moyano estaban colocadas sobre la acera Sur mirando al Norte, en invierno no les daba el sol.
- Busca en el diccionario la etimología de la palabra 'equinoccio'.

Fin de la nota histórica sobre el movimiento aparente del Sol.)

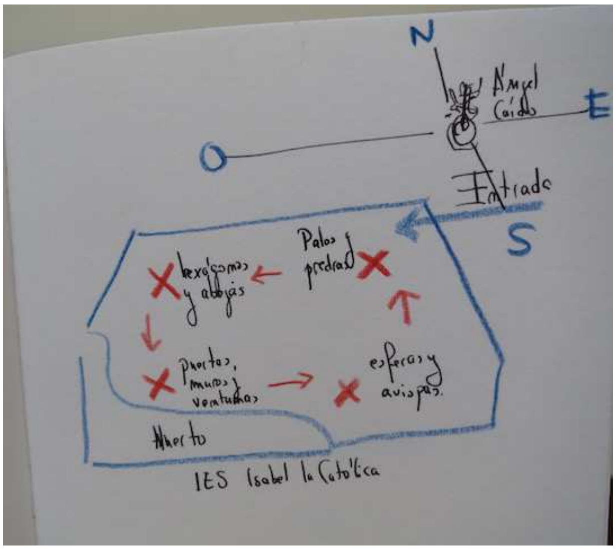
Los años veinte del siglo pasado fue época microglaciar, hacía un frío espantoso, y los libreros del Mercado del Moyano, con sus puestos sin calefacción y a la sombra, se morían de frío. Por eso pidieron ser trasladados a la acera Norte donde, mirando al Sur, podían calentarse al sol. Al cabo de un año consiguieron el permiso de alcalde y se construyeron casetas de madera sobre la acera Norte, que las casetas actuales reproducen. Al llegar al alto de la Cuesta de Moyano, cruzamos la calle Alfonso XII, entramos en el Retiro por la Puerta del Ángel Caído y subimos la cuesta del Paseo de Fernán Núñez hasta la glorieta con el monumento al Ángel Caído (escultura de Ricardo Bellever, 1877). Al llegar a la glorieta el paseo gira a la derecha, y nosotros con él. En seguida encontramos, a nuestra derecha, el muro de ladrillo del Vivero Municipal de Las Estufas y, a unos metros, su puerta principal.

Entramos en el recinto y avanzamos por el camino que tenemos delante. A nuestra derecha, protegidas por un hermoso laurel, están las oficinas del personal que trabaja en Las Estufas. Allí nos proveen de un folleto con un plano del recinto (el mismo que aparece en su página web), que incluye información sobre las actividades que en él se llevan a cabo y una breve descripción de sus distintas construcciones y lugares. El recorrido que se nos sugiere seguir a los visitantes, está indicado sobre el plano con flechas rojas: empieza y acaba en la entrada principal, situada en la esquina noreste del vivero, y tiene la forma aproximada de un rectángulo.

Plano de Las Estufas (según su página web).



En este paseo matemático, haremos un alto en cada una de las cuatro esquinas de este rectángulo (NE, NO, SO y SE), y aprovecharemos para reflexionar sobre lo que vemos.



Parada y ejercicio 1. Sobre palos y piedras.

Antes de iniciar el recorrido, leemos el folleto para hacernos una idea de lo que vamos a ver. Llama nuestra atención que algunas construcciones son descritas como 'invernaderos' y otras como 'Estufas'. Ya sabemos lo que es un invernadero, pero, ¿qué es una Estufa? El propio folleto nos lo explica: una Estufa es un invernadero con calefacción. El nombre viene de que el calor se distribuye mediante cañerías de agua calentada con estufas —calderas—. Según se nos indica en el plano, a nuestra izquierda tenemos una Estufa (1 en el plano) seguida por tres invernaderos (2 en el plano). Las cuatro construcciones son descritas con la expresión 'a dos aguas'. ¿Que querrá esto decir? Las observamos con atención.

Pregunta.
- ¿Qué tienen en común estas cuatro construcciones que pueda ser descrito con las palabras 'dos' y 'agua'?

Al cabo de un rato de pensar encontramos la respuesta, ¡el tejado! Consiste en dos alas planas inclinadas, por lo que agua de la lluvia caerá en lo que tiene todo el sentido describir como 'a dos aguas'. ¿Habremos acertado? Miramos alrededor. La construcción a nuestra derecha (4 en el plano) tiene el techo diferente y, efectivamente, en su descripción en el folleto no aparece la expresión 'a dos aguas': "*Estufa nº 7 adosada al muro y con cubierta curvilínea*".

Preguntas:
- ¿Por qué crees que en el folleto explicativo usan la palabra 'cubierta' y no 'tejado'?
- ¿Qué curva es la que describe la cubierta de esta Estufa?

Nos fijamos bien en la línea de la cubierta del la Estufa nº 7: es una parábola, la trayectoria que recorre una piedra cuando la lanzamos con fuerza. A nuestra izquierda, las cubiertas trazan rectas contra el cielo, a nuestra derecha, parábolas. Rectas y parábolas. Palos y piedras. Los juguetes favoritos de Manuel Rodrigáñez Sánchez-Vallejo, tataranieto (¡qué bonita palabra!) de Celedonio, cuando era pequeño.

Ejercicio: Saca tu cuaderno y dibuja el perfil de la cubierta de uno cualquiera de los tres invernaderos a la izquierda (los tres son del mismo tamaño, así que puedes elegir cualquiera de ellos), y el de la cubierta de la Estufa nº 7.

(Si vamos con gente chica, lo dejamos aquí y seguimos caminando hasta la esquina noroeste.)

Al hacer el dibujo de las cubiertas, hemos trazado una línea inclinada para los invernaderos y una curva para la Estufa, ambas calculadas a ojo. Si no queremos más que llevarnos un recuerdo a casa, con eso nos basta. Pero si lo que buscamos es describir las cubiertas de los invernaderos y la Estufa, de manera que se puedan reproducir con exactitud, cálculos a ojo no sirven, se necesita precisión, usar matemáticas.

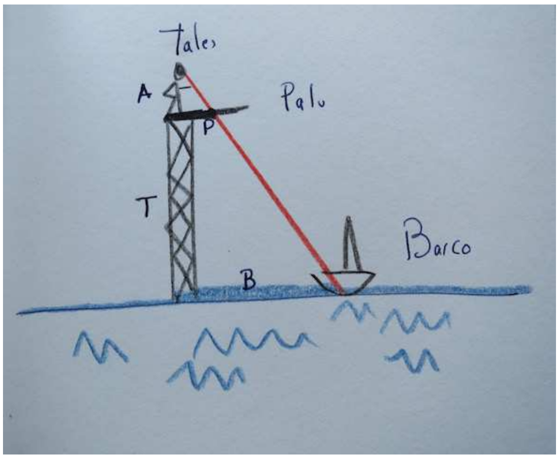
Empezamos con el invernadero a dos aguas. Las dos alas del tejado tienen la misma inclinación, así que es suficiente con calcular la de una cualquiera de ellas. Calcular la inclinación de un ala del tejado es lo mismo que calcular la medida del ángulo que forma la línea recta del ala del tejado con la línea del suelo. Las dos herramientas más importantes para medir ángulos son los teoremas de Tales y de Pitágoras.

(Nota histórica sobre los teoremas de Tales y Pitágoras:

Lo único que se sabe sobre el matemático Tales[2], es que vivió en el siglo VI a.C. Sus trabajos en geometría nos han llegado de la voz de Eudemo (370-300), discípulo de Aristóteles que escribió un libro en cuatro volúmenes titulado '*Historia de la geometría*'. El texto original de Eudemo se ha perdido también, pero, afortunadamente, Proclo (412-485) reprodujo párrafos enteros de él en su '*Comentarios sobre Euclides, Libro* I'. Según recoge Proclo (comentario a Euclides I-26[3]), Tales había descubierto un método para medir pirámides.

[2] 'A History of Greek mathematics', Sir Thomas HeatH, 1921, Ediciones Dover.
[3] Euclides, Libro I, proposición 26.

Buscaba generalizarlo para poder medir con él, desde una torre, la distancia a la que un barco está de la costa, cuando descubrió un hecho que hoy conocemos como 'el teorema de Tales'. Tales se subía sobre una torre, colocaba un palo largo a sus pies apuntando en la dirección del barco (el palo tenía que ser lo bastante largo como para sobrepasar el barco), y marcaba el punto en el que la línea visual de su ojo al barco cortaba con el palo. Lo que Tales descubrió es que, fuese lo alta que fuese la torre, o lo lejos o cerca que el barco estuviese de la torre, había algo que pasaba siempre.

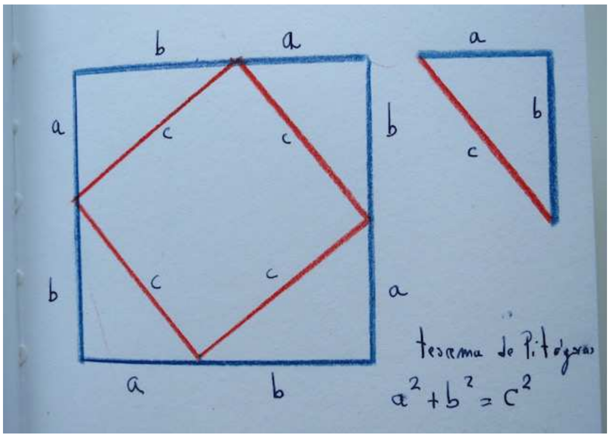


"Si la altura de Tales es A, la de la torre T y la longitud del palo hasta la marca P, el número que se obtiene al dividir P por A, siempre coincide con el que se obtiene al dividir B por T+A".

Puesto que este hecho ocurría siempre, independientemente de la altura de la torre o la distancia a la que estuviese el barco, Tales comprendió que el número que se obtenía cada vez, sólo dependía de la amplitud del ángulo entre la vertical al suelo y la línea de su ojo al barco. Este hecho descubierto por Tales (el Teorema de Tales) nos da instrucciones de cómo medir la amplitd del ángulo formado por dos rectas, digamos '*r*' y '*s*': elegimos un punto *P* cualquiera en sobre la recta '*r*', medimos la perpendicular 'x' desde *P* a la recta '*s*', medimos la distancia '*y*' sobre '*s*' desde el extremo de 'x' hasta el vértice del ángulo, y dividimos 'x' por 'y'. Este número va a ser siempre el mismo, sea cual sea el punto *P* que hayamos elegido. Le llamamos *tangente del ángulo*, y mide su amplitud.

El segundo gran teorema de la geometría clásica griega es el teorema de Pitágoras. Aunque se le llama así, no hay documentos que confirmen que lo demostró Pitágoras, matemático que vivió también en el siglo VI a.C, algo después que Tales. La primera demostración que se conoce del teorema de Pitágoras es la que da Euclides en su proposición I-47:

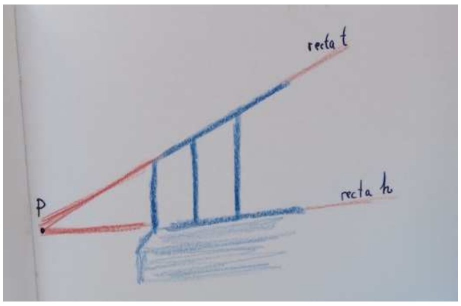
'En un triángulo rectángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que contienen el ángulo.'



El teorema de Pitágoras, pues, nos dice que en un triángulo rectángulo, cateto al cuadrado más cateto al cuadrado es igual a hipotenusa al cuadrado.

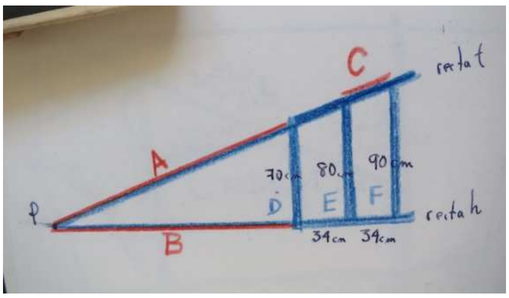
Fin de la nota histórica sobre los teoremas de Tales y Pitágoras.)

Nos concentramos en la fachada del invernadero a dos aguas que hemos elegido. Para calcular sus medidas utilizaremos los dos grandes teoremas sobre ángulos de la geometría griega clásica: el de Tales y el de Pitágoras. La línea inclinada de la cubierta y la línea horizontal donde acaban los cristales, trazan dos rectas *t* y *h* en el plano de la fachada. Las imaginamos prolongándose hasta cortarse en un punto P (que cae fuera el invernadero, en el aire), y lo dibujamos en el cuaderno.

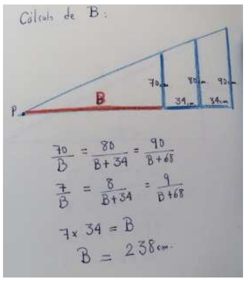


Al cortarse en el punto P, las rectas *t* y *h* limitan una porción del plano que llamamos ángulo entre ellas. La forma exacta del invernadero (el tamaño de sus varillas metálicas) depende de la amplitud de ese ángulo, que es lo que se conoce con el nombre 'tangente' de ese ángulo.

La manera de calcular la tangente de un ángulo (su amplitud) nos la da 'Teorema de Tales' (siglo VI a.C.): ' si nos colocamos en cualquier punto en la base del invernadero sobre la recta h, el cociente entre la distancia de ese punto a la cubierta del invernadero y la distancia desde ese punto a P es precisamente la tangente del ángulo que forman las rectas t y h'.



A fin de usar el Teorema de Tales, medimos las tres primeras varillas verticales de metal (con dos bastaría, pero medimos tres para asegurarnos mejor, porque los cristales, la masilla y las varillas de metal, al estar expuestas a la lluvia y el sol, están algo deformadas). Las tres primeras varillas verticales miden, respectivamente, 70 cm., 80 cm. y 90 cm. y las varillas horizontales entre ellas miden 34 cm.



De acuerdo con el Teorema de Tales el número que se obtiene al dividir 70 por la distancia B en centímetros, debería coincidir con el número que obtenemos al dividir 80 por B+34, o al dividir 90 por la longitud B+68. Echamos las cuentas en nuestro cuaderno y lo comprobamos.

70/B=80/(B+34); 7/B=8/(B+34); 7B+238 =8B; B=238

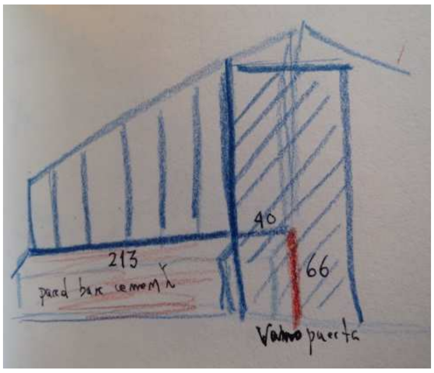
70/B=90/(B+68); 7/B=9/(B+68); 7B+476 =9B; 2B=476; B=238

Concluimos que la distancia B entre el extremo inferior izquierdo del invernadero, y el punto P de corte entre *t* y *h*, es de 238 cm.

Si B mide 238 centímetros, la tangente del ángulo entre las rectas *t* y *h* tendrá como tangente 70 dividido por 238, eso es, usando la calculadora del móvil, 0'29411764705882...

Conocer la tangente del ángulo entre las rectas *t* y *h* es una herramienta muy potente, porque nos permite saber la altura del invernadero en cualquier punto sobre la recta *h*, sin tener que subirnos a una escalera. Basta con medir la distancia en centímetros desde ese punto a P y multiplicar ese número por 0'29411764705882... Por ejemplo, podemos saber a qué distancia del suelo está el punto más alto del invernadero.

Ejercicio: Calcular en el cuaderno a qué distancia del suelo está el punto más alto del invernadero.



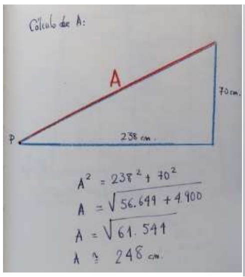
Solución:

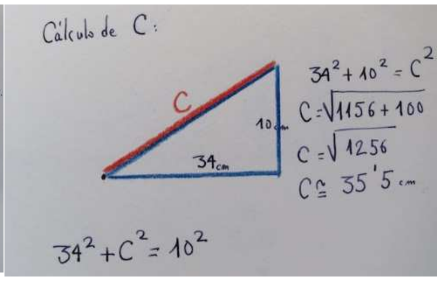
- Primero tenemos que hallar la distancia entre el punto P y el centro del invernadero. Puesto que la distancia horizontal desde el extremo inferior izquierdo del invernadero y la puerta es de 214 cms, y la puerta mide 80 cms de ancho, la distancia buscada es de 238 cms. + 212 cmz. +40 cms. = 490 cms.
- El invernadero en sí tiene una altura aproximada de 0'29411764705882... x 490 cms. = 147 cms.
- La pared de cemento sobre la que está asentado el invernadero, tiene una altura de 66 cm. Por lo tanto, el punto más alto del invernadero está a una distancia de 66 cms. + 147 cms. = 213 cms.

Sólo nos queda por calcular la longitud de las varillas A y C bajo la cubierta.

Ejercicio: Calcular en el cuaderno, usando los datos que hemos calculado y el Teorema de Pitágoras, la ongitud de las varillas A y C bajo la cubierta.

Solución:

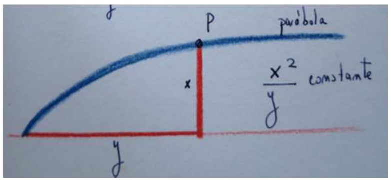




$A^2=238^2 + 70^2$; A = raíz cuadrada de (56.649+4.900) = raíz cuadrada de (61.544) ≈ 248

$C^2=34^2 + 10^2$; C = raíz cuadrada de (1.156+100) = raíz cuadrada de (1.256) ≈ 35'5

Gracias a los dos grandes teoremas de la matemática clásica griega sobre álgulos entre rectas, hemos podido calcular el tamaño y forma de los tres invernaderos a dos aguas (2 en el plano de las Estufas). Pasemos ahora a la Estuna N° 7 (marcada en el plano con 4). Su cubierta no es recta, sino con la misma forma curva que sigue la trayectoria de una piedra cuando la lanzamos con fuerza. Esta curva se conoce como parábola. La parábola es una de las tres figuras que se obtienen cuando cortamos un cono con un plano; las otras dos son la elipse (un círculo es un tipo de elipse) y la hipérbola. Menecno las descubrió y Apolonio les puso nombre: cónicas.



La parábola tiene un eje central que pasa por su vértice. Esto nos permite identificar cualquier punto *P* sobre la parábola con dos números (**x**,**y**). El número **x** es la distancia perpendicular **x** desde *P* al eje, el número ***y*** la distancia sobre el eje desde el extremo de **x** hasta el vértice de la parábola. Apolonio descubrió que al dividir ***y*** por **x**^{2} obtenemos siempre un mismo número *k*, sea cual sea el punto *P* que hayamos elegido sobre la parábola. Esto significa que el número k está asociado a la parábola, no al punto sobre el que nos coloquemos para calcularlo. De hecho, este número mide la amplitud de la parábola. En el lenguaje del álgebra, inventado por el matemático al-Kwarizmi, de la Escuela de Bagdad (s. VIII), la parábola es una curva con la propiedad de que existe un número fijo *k*, tal que cualquier punto *P=(**x**,**y**)* de la parábola verifica la expresión

$$y/x^2 = k$$

o lo que es lo mismo,

$$y=k \cdot x^2 .$$

A esta expresión se la conoce como 'ecuación de la parábola', y es, por así decirlo, un carnet de identidad de la parábola y *k* sería su número de identificación, pues para construir con exactitud una parábola, sólo tenemos que conocer su número k. Por ejemplo, $y=x^2$, $y= - x^2$, $y= 0'5 \cdot x^2$ son las ecuaciones de tres parábolas distintas. En la primera *k* es 1, en la segunda, *k* es -1, y en la tercera *k* es 0'5.

(<u>Paréntesis histórico sobre ecuaciones y ejes de coordenadas</u>:

Uno de los problemas centrales en matemáticas es el de hallar soluciones a ecuaciones. Ya hemos encontrado antes la ecuación de Pitágoras, que nos describe la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. También nos resulta familiar, aunque sólo sea por verla reproducida en camisetas y carteles, la ecuación de Einstein que relaciona masa, energía y velocidad de la luz. Estudiar si una ecuación tiene soluciones o no, y de tenerlas, describirlas todas, es uno de los problemas más antiguos en matemáticas, y también uno de los más difíciles.

El paso más importante en el estudio de las ecuaciones lo dieron, independientemente, Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). En el siglo XVII, y siguiendo las pautas marcadas por los matemáticos de la escuela de Bagdag de los siglos X y XI, en concreto Abu al-Jud ibn al-Leith y Omar al-Jayán (también espléndido poeta), Fermat y Descartes relacionaron la búsqueda de soluciones a ecuaciones con la búsqueda de puntos sobre curvas. Concretamente, Fermat en su libro *Ad locos planos et solidos isagogue* (1636) enuncia el principio fundamental de la geometría de las coordenadas o geometría analítica, como se le llama en matemáticas:

> "Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tendremos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva."

Fermat también utiliza de manera sistemática en sus gráficas de las curvas, los ejes de coordenadas formados por dos rectas perpendiculares entre sí: los ejes ***x*** e ***y*** que todos aprendimos a utilizar en la escuela. Por su parte, un año después y de manera mucho menos precisa, Descartes escribe a su vez el principio de la geometría analítica en el libro II de *La géométrie*, uno de los tres apéndices de su libro *El discurso del método* (que no suele estar incluido en las traducciones españolas):

> "La solución de uno cualquiera de estos problemas de lugares geométricos consiste nada más que en hallar un punto para cuya completa determinación falta una condición. En cualquiera de estos casos se llega a una ecuación que contiene dos cantidades incógnitas.

La descripción de Descartes es mucho menos clara que la de Fermat, y además no utiliza sistemas de coordenadas rectangulares ni fijos (aunque ahora a estos sistemas de coordenadas, introducidos de hecho por Fermat, les llamemos cartesianos). La gran contribución de Descartes fue describir las construcciones geométricas de regla y compás descritas en la Grecia Clásica, al lenguaje de las ecuaciones y álgebra desarrollado por la Escuela de Bagdad. Fue al primero que se le ocurrió traducir los procedimientos geométricos a operaciones algebraicas. La manera de mirar de Fermat y la manera de describir de Descartes, juntas, construyeron el puente entre la geometría y el álgebra que permitió a la matemática estudiar las ecuaciones como las estudiamos hoy.

Pensemos en una carretera trazada sobre el globo terráqueo. Cada punto en esta carretera puede ser descrito mediante dos números, su latitud y su longitud, que miden la distancia más corta desde este punto a dos circunferencias trazadas sobre la superficie terrestre perpendiculares entre sí: el meridiano de Greenwich y la línea del Ecuador. Lo mismo que hacemos sobre la Tierra, se puede hacer sobre cualquier superficie, una hoja de papel plana, por ejemplo. Basta con que tracemos dos rectas perpendiculares que llamaremos ejes de referencia o de coordenadas, fijemos una unidad de medida sobre ellos, y asociemos a cada punto sobre la superficie los dos números que miden sus distancias respectivas a los ejes.

Los dos números que determinan la posición de un punto con respecto a dos ejes de coordenadas se denominan las *coordenadas del punto respecto a esos ejes*. Desde Fermat y Descartes, las ecuaciones que relacionan dos cosas que se midan por números (dos magnitudes diríamos con propiedad), se representan gráficamente mediante una curva y, a su vez, las curvas se describen sobre el papel con una ecuación. A cada punto en la curva corresponde una solución de la ecuación, y cada solución de la ecuación representa un punto de la curva.

Fin del paréntesis histórico sobre ecuaciones y ejes de coordenadas.)

Ejercicios: Estos ejercicios sirven para entender cómo construir una parábola si conocemos su ecuación, esto es, su número *k* de identificación.

- Dibuja en tu cuaderno dos rectas perpendiculares para usarlos como ejes de coordenadas. Fija una unidad de medida lo bastante pequeña como para que te quepan los siguientes puntos en la hoja: (-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,-9), (0,-8), (0,-7), (0-6) (0,-5), (0,-4),(0,-3), (0, -2), (0,-1), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8) y (0,9).
- Comprueba en tu cuaderno que las tres parábolas

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}^2,\quad \mathbf{y}= - \mathbf{x}^2,\quad \mathbf{y}= 0'5 \cdot \mathbf{x}^2$$

pasan por el punto (0,0). Dibuja en tu cuaderno al menos cuatro puntos de cada una de ellas, asegurándote de que al menos dos de ellos tengan la coordenada **x** negativa. Únelos por una línea, y tendrás un dibujo aproximado de cada una de ellas. Cuantos más puntos calcules, más exacto será el dibujo.

Para describir con precisión la cubierta de la Estufa Nº7, necesitamos calcular el número fijo k asociado a la ecuación de la parábola que forma. Nos acercamos y sacamos nuestra cinta métrica. De cerca, parece que la Estufa lleva muchos años expuesta a la intemperie. Lo comprobamos en el folleto informativo.

Ejercicio: Lee en voz alta la descripción que de la Estufa nº 7 da el folleto explicativo del Vivero.

> "Se instaló en el vivero en 1956 procedente del Palacio de Liria —perteneciente a la Casa de Alba—, y es, sin duda, el mejor de la colección existente. Su diseño responde a un esquema típico del siglo XIX[4, 5], con rejillas de hierro fundido de diseño artístico para cubrir las canaletas de la calefacción. Además mantiene un sistema de humidificación denominado fog. Actualmente se encuentra restaurado y alberga numerosas especies de carácter tropical, pudiéndose contemplar en el itineraio guiado."

Efectivamente, esta Estufa lleva más de cien años expuesta a la lluvia y el sol, lo que explica que algunas piezas parezcan algo dadas de sí. Será mejor tomar varias medidas. Así nos aseguraremos de que nuestros cálculos para hallar el número k que mide la amplitud de la parábola, nos dan una respuesta fiable.

<u>Ejercicio</u>:

- ¿Sabes lo que significa en castellano la palabra inglesa 'fog'? Si no lo sabes, apúntala en el cuaderno y busca su significado en el diccionario al llegar a casa.

Cuando sepas lo que significa, piensa qué puede querer decir la expresión '*mantiene un sistema de humidificación denominado fog*'.

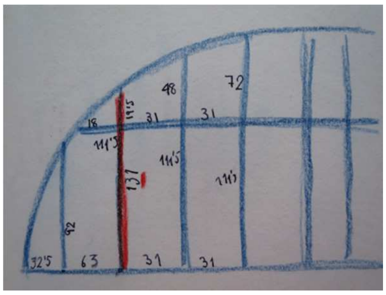
- Toma medida de las tres o cuatro primeras varillas verticales de la Estufa Nº7. Serán los valores *x* que utilizaremos para calcular la ecuación de la parábola de la cubierta.
- Toma medida de las distancias entre el vértice de la parábola y los puntos de corte de su eje con esas mismas varillas. Serán serán nuestros valores *y*.
- Calcula el valor k para cada uno de los tres o cuatro puntos.

<u>Solución</u>: Esta solución se basa en las medidas que yo tomé en abril de 2016 que, como todas las medidas tomadas sin instrumentos de precisión, son aproximadas. Además, el día que las tomé llovía, y las varillas del invernadero se deforman con la humedad. Al echar las cuentas, elegí el orden más adecuado para el tipo de funciones que tiene la calculadora de mi móvil.

---

[4] Según nos explicó Javier Spalla, en la Inglaterra de siglo XIX se introdujeron los invernaderos con cubierta curvilínea para aprovechar mejor el poco sol que hay en invierno en ese país. Un ejercicio interesante que se puede hacer por ejemplo, como actividad interdisciplinar entre matemáticas y física en Bachillerato —de hecho se hace en algunos Institutos—, es intentar explicar por qué una cubierta de cristal curvilínea —parabólica, de hecho— aprovecha mejos los rayos de luz del sol que una cubierta recta.

[5] En España, donde tenemos tantas horas de sol, la idea resultó poco práctica y se volvió a las cubiertas a dos aguas, porque la luz recogida por una parábola es tanta que las plantas se achicharran.



y	**x**	$\mathbf{x}^2$	k=$\mathbf{y}$ / $\mathbf{x}^2$
32'5	92	8464	0'004
95'5	131	17161	0'006
126'5	159'5	25440'25	0'005

Así pues, la ecuación de la parábola que forma la cubierta de la Estufa Nº 7 de las Estufas del Retiro es

$\mathbf{y}= 0'005 \cdot \mathbf{x}^2$.

Parada y ejercicio 2. Sobre abejas y hexágonos.

Seguimos nuestro paseo, disfrutando con las preciosas Estufas de hierro y cristal que nos vamos encontrando adosadas al muro norte del vivero. Casi todas utilizan el sistema 'fog', y están dedicadas al cultivo de plantas que requieren entornos especialmente húmedos.

Llama nuestra atención un precioso ejemplar de Ciprés de los Pantanos. Nos cuenta Javier Spalla, que se trata de un hermano de los árboles que salen del agua en el estanque frente al Palacio de Cristal. Vivió con ellos hasta que, en algún momento entre 1960 y 1970, se le partió la cabeza y fue trasladado al vivero. Allí se le replantó y se le curó, y con el tiempo ha terminado por convertirse en uno de los ejemplares más hermosos (si no el más hermoso) de su especie en toda la ciudad.

Hacemos nuestra segunda parada en la esquina noroeste del recinto, junto a una palmera que crece dentro de una enorme maceta de cemento con seis lados planos iguales. Vista desde arriba, la maceta tiene forma de polígono con seis lados iguales

Preguntas:

- ¿Cómo se llama un polígono que tiene seis lados iguales? ¿Se te ocurre alguna otra cosa con forma hexagonal?

Los hexágonos más estudiados en la historia de las matemáticas han sido, sin duda, los de las celdillas de los panales de las abejas.

(Nota histórica sobre los panales de abeja.

El primer texto matemático sobre los panales de abejas lo escribió el matemático egipcio Papus de Alejandría, que vivió entre los siglos III y IV.

Hacia el año 340, Papus escribió *Colección matemática*, ocho volúmenes en los que, además de su trabajo, recogió prácticamente toda la matemática griega desarrollada hasta el momento (Alejandría era en aquel entonces una colonia griega). Papus comienza así el prefacio al Volumen V de su libro.

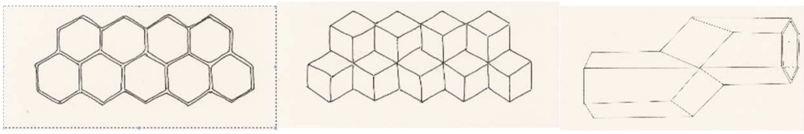
> ``La divinidad, querido Megetius, ha otorgado a los hombres la major y más perfecta noción de sabiduría en general y de ciencia matemática en particular, y sólo otorgó parcialmente este privilegio a los animales. A los hombres, al haberles dotado de razón, les concedió que hiciesen todo a la luz de la inteligencia y la demostración, y a los otros seres vivos, aunque les negó la razón, les concedió el que consiguiesen todo lo que les fuese vitalmente necesario gracias a un cierto instinto natural. La existencia de este instinto puede ser observado en muchas otras criaturas vivas, pero sobre todo en abejas. Son realmente admirables, en primer lugar, su disciplina y sumisión a las reinas que gobiernan en su estado. Pero mucho más admirable todavía es su emulación, la limpieza con que llevan a cabo la recolección de la miel, y el planificado y maternal cuidado con que la custodian.
>
> Probablemente porque saben que los dioses les han confiado la tarea de hacer llegar a parte selecta de la humanidad su ambrosía, no les parece adecuado dejarla caer descuidadamente sobre el suelo, la madera, o cualquier otro material feo e irregular. En vez de ello, tras recolectar los dulces de las más hermosas flores que crecen sobre la tierra, construyen para recoger la miel, los receptáculos que llamamos colmenas, con celdillas todas iguales, semejantes y contiguas unas a otras, y en forma hexagonal. Inferimos de la siguiente manera, que han llegado a ello en virtud de cierta planificación geométrica: necesariamente habrán pensado que las figuras habrían de ser contiguas unas a otras, es decir, teniendo paredes communes, de manera que ninguna materia extraña pudiese colarse en los intersticios entre ellas y profanar la pureza de su producto.
>
> Habiendo tres figuras con las que es posible recubrir exactamente el plano alrededor de un mismo punto, las abejas, debido a su astucia instintiva, eligen para la construcción del panal de miel la figura con el mayor número de ángulos, porque saben que contendrá más miel que cualquiera de las otras dos. Las abejas, pues, conocen este hecho que les resulta muy útil, que el hexágono es mayor que el cuadrado y el triángulo[6] y dará cabida a más miel por el mismo coste de material utilizado en construir las distintas figuras.
>
> Nosotros, sin embargo, afirmando como afirmamos tener más inteligencia que las abejas, investigaremos un problema aún más profundo, el de que entre todas las figuras planas equiláteras y equiangulares de igual perímetro, la más extensa es la que tiene mayor número de ángulos, y la mayor figura plana entre todas las de igual perímetro es el círculo.'' (Pappus, Colección Matemática, Libro V, La Collection Mathématique, edición en francés de A. Blanchard, 1982, Tomo primero, págs. 237-239).

Más de mil años después, e inspirado por la lectura del libro de Papus, el matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) retomó el estudio de las colmenas y de la geometría de las celdillas.

---

[6] Papus se refiere aquí al hexágono regular y triángulo equilátero, y a la noción de tamaño para figuras geométricas introducida por Euclides en su libro *Elementos* (300 a.C.). Los griegos utilizaban letras para expresar los números, lo que convertía el echar cuentas en una tarea bastante farragosa. Por eso, Euclides evita usar conceptos como área o volumen, que requieren usar números, y define una nueva manera de ser `iguales' dos figuras (planas o sólidas): dos figuras son ``iguales'' si son soluciones de un mismo rompecabezas (de piezas planas o sólidas), por lo que podemos pasar de una figura a otra sin más que reordenar las piezas.

``Si se les preguntase a los geómetras por el patrón seguido en la construcción de las celdillas de abejas, contestarán que un patrón hexagonal. La respuesta resulta evidente tras echar un simple vistazo a las aberturas o entradas, y a los lados que forman las celdillas. Cada celdilla está rodeada por otras seis, y separada de la contigua por un pared compartida. Pero si observamos el fondo de cada celdilla, notaremos que desciende en un ángulo [diedro] obtuso formado por tres planos.



Este fondo (que podríamos llamar la quilla) se une a los seis lados de la celdilla por otros seis ángulos, tres superiores de tres lados intercalados con tres inferiores, de cuatro lados. Hay que añadir que las celdillas están distribuidas en dos capas, con las aberturas mirando direcciones opuestas, los fondos tocándose en un empaquetamiento cerrado y la punta de cada quilla de una capa encajada en las puntas de tres de las quillas de la otra capa. Mediante este diseño, cada celdilla no sólo comparte seis paredes con las que le rodean en su misma capa, sino también tres planos al fondo con otras tres celdillas de la capa contraria. Así, cada abeja tiene nueve vecinas, con cada una de las cuales comparte una pared divisoria. Los tres planos de la quilla son idénticos entre sí y su forma es lo que los geómetras llaman un rombo. Intrigado por estos rombos, empecé a investigar en geometría a ver si se podía construir, utilizando exclusivamente rombos, un sólido como los cinco sólidos regulares y los catorce sólidos de Arquímedes.'' (Johannes Kepler, *The Six Cornered Snow Flake. A New Year's Gift* (1611), edición bilíngüe latín/inglés, Paul Dry Books 1910.)

Los sólidos regulares son cuerpos que tienen polígonos regulares iguales por caras y ángulos iguales en todos sus vértices. Hay una infinidad de polígonos regulares, pero sólo cinco sólidos regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Se les conoce también como los sólidos platónicos, al ser las figuras que usó Platón en el modelo con que describe el universo en el diálogo *Timeo*. Los sólidos de Arquímedes son sólidos semi-regulares, formados por la combinación de polígonos regulares de más de un tipo. Hay trece de ellos (no catorce, como afirma Kepler), y han llegado hasta nosotros a través del Libro V de *Colección matemática* de Papus. El ejemplo más conocido de sólido de Arquímedes es la pelota de futbol, que está hecha con veinte hexágonos y doce pentágonos.
<u>Fin de la nota histórica sobre los panales de abeja</u>).

El hexágono tiene muchas propiedades especiales que explican por qué es una de las formas que más aparecen en la naturaleza y en las construcciones humanas[7]. Algunas son fáciles de ver y explicar, como sus simetrías. Las simetrías de una figura son las cosas que se le pueden hacer y que siga pareciendo la misma figura.

El hexágono tiene distintas simetrías, podemos girarlo y podemos voltearlo, por ejemplo. Calcular todas las simetrías de un hexágono es un ejercicio bastante entretenido para pensr mientras se viaja

[7] Prácticamente todas ellas se van estudiando entre la escuela Primaria y el último año de Bachillerato. Según con quiénes estemos llevando a cabo este paseo, se pueden pensar unas u otras.

en metro, por ejemplo. La propiedad más importante del hexágono regular (además de que, como veremos enseguida, es facilísimo construirlo), es la que en matemáticas se conoció durante muchos años como 'La conjetura del panal de abejas': el hexágono regular es la figura que distribuye el plano en áreas iguales de manera más eficiente.

(Nota histórica sobre 'La Conjetura del panal de abejas': La primera referencia escrita sobre la conjetura del panal, está en el texto de Papus que hemos leído hace un rato. En 1743, Colin MacLaurin (1698-1743), alumno de Isaac Newton, tras leer a Papus y a Kepler retomó el estudio de las colmenas. MacLaurin llegó a la conclusión, aunque no supo demostrarlo, de que en una celdilla, no sólo la apertura hexagonal, como afirmase Papus, sino toda la forma, incluyendo la quilla posterior, es óptima, en el sentido de que minimiza la cantidad de cera necesaria en su construcción. Costó mucho trabajo y muchas matemáticas dar respuesta a la Conjetura del Panal. Lo consiguió el matemático húngaro László Fejes Tóth (1915-2005). En 1964, Fejes Tóth demostró que MacLaurin estaba equivocado, y en la celdilla en una colmena sólo la boca hexagonal es óptima. Una pequeña variación en su quilla ahorraría a las abejas el 0,35% de cera (László Fejes Tóth, *What the bees know and what they do not know*, en Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 70, 4 (1964), págs. 468-481).

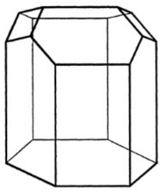


Ilustración de las celdillas de Fejes Tóth, extraída del artículo original.

Fin de la nota histórica sobre `La Conjetura del Panal'.)

Construir un hexágono regular es facilísimo. Sólo se necesita un cordel si lo vamos a trazar sobre un suelo de tierra (arena), o un cordel y un lápiz (tiza) si lo vamos a trazar sobre un papel (pizarra).

Pregunta:

- ¿Cuál es la diferencia entre tierra y arena? Si no lo sabes, apunta las palabras en el cuaderno, y busca su significado en el diccionario en cuanto llegues a casa.

Instrucciones para construir un hexágono usando papel, lápiz y un cordel:

1. Ata un lápiz en un extremo del cordel.
2. Dibuja un punto (será el centro, primero de un círculo, y luego del hexágono que construirás) y fija el otro extremo del cordel con una mano.
3. Con la otra mano coge el lápiz, mantén tenso el cordel y gira el lápiz alrededor del centro dibujando un círculo.

4. Dibuja todos los puntos que te quepan sobre el círculo, que estén cada uno exactamente a distancia la longitud del cordel del siguiente.
5. Te han cabido exactamente seis puntos. Únelos, y ya tienes el hexágono.

(Si vamos con gente chica, lo dejamos aquí y seguimos caminando hasta la esquina Suroeste.)

Volvemos a fijarnos en el macetero. Es un contenedor, una especie de caja de cemento. Las caras de arriba y abajo son dos hexágonos, y las de los lados, seis rectángulos con seis lados planos iguales. (Recuerda: si alguna de las palabras que usemos, no sabes o no te acuerdas de qué significa, no te preocupes. Lo apuntas en el cuaderno y lo miras en el diccionario al llegar a casa.) Esa figura se llama prisma hexagonal.

Al mirar con cuidado observamos que, de hecho, la maceta tiene un pedestal, que también tiene forma de prisma hexagonal pero más pequeño. Sacamos la cinta métrica y tomamos medidas.

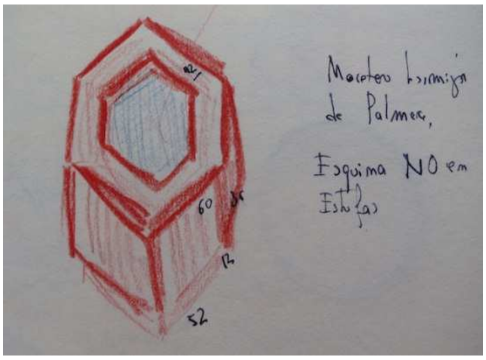
Pedestal: hexágono con lado de 52 cms. y altura de 12 cms.
Maceta: hexágono con lado de 60 cms. y altura de 36 cms.

Estas medidas por sí solas no valen para dibujar la maceta, ni para calcular cuánta pintura necesitaríamos si quisiésemos pintarla por fuera con pintura. Tampoco nos sirven para calcular cuanta tierra se necesita para llenarla.

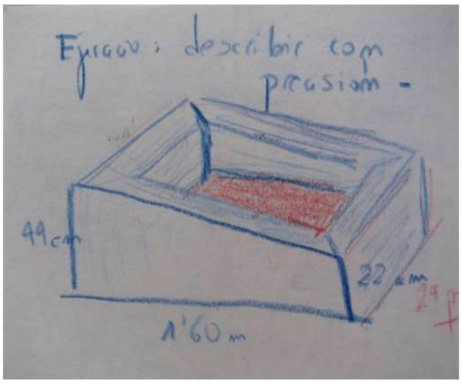
<u>Pregunta</u>:

- ¿Qué medida es la que nos falta?

<u>Ejercicios</u>:



- Saca la cinta métrica y toma la medida que falta.
- Calcula en centímetros cuadrados la cantidad de pintura que necesitaríamos si quisiésemos pintar una de estas macetas por fuera.
- Calcula, primero en centímetros cúbicos y luego en litros, cuánta tierra se necesita para llenar una de ellas.
- Entérate (pregunta a una de las personas que trabajan allí, o vete fijándote durante el paseo) cuántas macetas como ésta hay en Las Estufas, y haz el cálculo de pintura y tierra necesarias para pintarlas y llenarlas todas.
- Al llegar a casa, busca en internet el precio de la pintura anti-hormigas para macetas y de la tierra de exterior para palmeras, y calcula lo que le costaría al Ayuntamiento de Madrid el material para pintar con pintura anti-hormigas y llenar de tierra para palmeras, todas las macetas como ésta que hay en Las Estufas.



- Cerca de la maceta de la palmera, hay unas grandes pozas de hormigón muy alargadas, con alturas distintas en sus paredes. Dibújalas en tu cuaderno. Describe con precisión la geometría de su forma.

Parada y ejercicio 3. Sobre vidrieras, puertas, muros y ventanas.

Seguimos nuestro camino por el lateral Oeste del recinto. Dejamos a nuestra derecha un invernadero pequeñito y umbrío, cubierto por una esterilla de paja, que alberga los semilleros de las plantas aromáticas. Delante de la caseta, plantas aromáticas adultas crecen en maceteros. Su olor llega hasta nosotros.

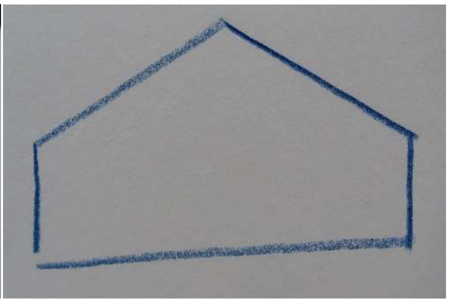
<u>Ejercicio</u>:
¿A qué otra palabra te recuerda 'umbrío'? ¿Qué crees que significa? Si no se te ocurre, pregúntalo.
¿Sabes la diferencia entre las palabras 'olor', 'aroma', 'fragancia' y 'esencia'? Si no lo sabes toma nota en tu cuaderno y busca su significado cuando llegues a casa.
¿Cuántas plantas aromáticas conoces? ¿Para qué se usa cada una de ellas?

Pronto llegamos a la esquina Suroeste de Las Estufas. A nuestra izquierda (13 en el plano) vemos cuatro invernaderos a dos aguas, pequeños y discretos, orientados Norte-Sur y numeradas del 15 al 18 con pintura negra sobre las puertas. Nos acercamos a ellos. Comprobamos (por su sistema de calefacción) que se trata de cuatro Estufas. Una placa de metal sobre la puerta de la Estufa Nº17, atestigua que vino de Bélgica, donde fue construida por Van Hoecke. Leemos en el material informativo que, efectivamente, dos de estos invernaderos vinieron de Bégica (el 15 y el 17), donde fueron construidos a finales del siglo XIX. Están muy pensados, articulados por entero y con cremalleras para abrir y cerrar las ventanas. El constructor, Van Hoecke, los trajo desde Gantes (Bélgica) para mostrarlos en las Exposiciones de Horticultura que se celebraron en el Retiro entre 1880 y 1890.

Se cree que Celedonio Rodrigáñez, que estaba en el comité de las exposiciones, los compró para el Ayuntamiento. Los demás se construyeron aquí, copiando el modelo belga. Aunque no sean los invernaderos más llamativos del recinto, son mis preferidos. Todos parecen tener las mismas dimesiones y estructura. Sin embargo, hay algo que de inmediato nos permite distinguir unos de otros: el diseño de los cristales de las fachadas.

Ejercicios:

- Elige una entre las Estufas 15, 16, 17 y 18, y dibuja en tu cuaderno el diseños de su fachada principal (orientada al Sur).

- Haz cuatro copias del contorno de la parte de la fachada que hayas elegido que esté cubierta por cristales.
- Intenta rellenar la primera de ellas con triángulos equiláteros (triángulos con todos sus lados iguales). ¿Puedes hacerlo? Si la respuesta es no, ¿crees que se trata de que tú no puedes hacerlo, o de que no es posible hacerlo?
- Intenta rellenar la segunda de ellas con cuadrados. ¿Puedes hacerlo? Si la respuesta es no, ¿crees que se trata de que tú no puedes hacerlo, o de que no es posible hacerlo? Intenta explicar el por qué de tu respuesta.
- Intenta rellenar la tercera de ellas con hexágonos. ¿Puedes hacerlo? Si la respuesta es no, ¿crees que se trata de que tú no puedes hacerlo, o de que no es posible hacerlo? Intenta explicar el por qué de tu respuesta.
- Intenta rellenar la cuarta de ellas con una combinación de triángulos equilateros, cuadrados y hexágonos, aeegurándote de que usas al menos una de cada una de estas figuras. ¿Puedes hacerlo? Si la respuesta es no, ¿crees que se trata de que tú no puedes hacerlo, o de que no es posible hacerlo? Intenta explicar el por qué de tu respuesta.
- La quinta copia, vuelve a rellenarla con la vidriera de triángulos equiláteros, pero esta vez coloréalos combinando cuatro colores (uno puede ser el color del papel).
- Rellena ahora la sexta copia con la misma trama de triángulos equiláreros, y coloreados con los mismos cuatro colres, pero cambiando el lugar de algunos colores. ¿Dirías que se trata de la misma vidriera?
- Dibuja un triángulo equilátero, y dentro, dibuja una flor lo más sencilla posible y que no sea simétrica (su lado izquierdo, distinto de su lado derecho). Vuelve a rellenar la séptima copia con la misma trama de triángulos rectángulos, y dibuja esa misma flor en cada uno de ellos.
- Finalmente, rellenar la última copia de la fachada del invernadero con la misma trama de triángulos rectángulos y dibuja en cada uno la misma flor que antes, pero con el tallo orientado

hacia algún lado distinto del triángulo (esto es, girando la flor), o dándole la vuelta de derecha a izquierda. ¿Dirías que se trata de la misma vidriera?

(Paréntesis sobre el recubrimiento de un plano con polígonos regulares y losetas:

Cuando intentamos recubrir completamente el plano sin dejar intersticios mediante un solo modelo de polígono regular, pronto caemos en la cuenta de que esto sólo es posible con tres tipos de polígonos: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. La razón es que para que un polígono regular pueda usarse como base de una trama que recubra el plano, el ángulo en su vértice tiene que ser un divisor de 360 °, y sólo el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, cuyos ángulos en el vértice son 60 °, 90º y 120 º respectivamente, cumplen ese requisito. Hay, pues, sólo tres posibilidades. Si dibujamos unas trama lo bastante grandes como para poder tomar medidas cómodamente, y cubrimos con ellas la misma cantidad de espacio, no es difícil, usando una regla, comprobar que, si imaginamos que las paredes de las tramas esán hechas de cera, la trama que menos cera requiere entre las tres es la de hexágonos. Esta es la propiedad que, según leímos en el libro de Papus, lleva a las abejas a construir sus panales con celdillas hexagonales.

El estudio de las tramas hechas con polígonos regulares no tiene mucho misterio, pues. Hay tres y se acabó. Otra cosa, sin embargo, es el estudio delas distintas maneras de cubrir una superficie con losetas, todas iguales, pero a las que, como en los alicatados de cocinas y baños, podemos girar, trasladar o voltear. El ejemplo más conocido y hermoso de este tipo de recubrimientos es el de los 'zeligs' (decorados por azulejos) de los muros y ventanas de la Alhambra.

La manera más fácil de recubrir una pared con azulejos, o estampar una tela con un diseño, es elegir un dibujo inicial y repetirlo de alguna manera sistemática lo largo de la superficie. los alicatados de los cuartos de baño, por ejemplo, suelen tener una trama muy sencilla: existe una loseta inicial con forma de paralelogramo que ha sido trasladada en todas las direcciones posibles hasta recubrir por completo la pared. Esta trama supone la manera más fácil de cubrir toda una pared con copias de una misma loseta. Pero no es la única. Podríamos ir girando el paralelogramo y obtener un diseño estrellado. Y tambien reflejarlo en un espejo imaginario y conseguir así un mosaico rico en simetrías. En cualquier caso, si quisiésemos dar a alguien instrucciones precisas para cubrir toda una pared a partir de una loseta inicial, sólo tendríamos que dar a esta persona dos cosas (llamadas, juntas, la estructura del recubrimiento):

1. La loseta inicial con su dibujo.
2. Las transformaciones a que someter esta loseta para recubrir con él la pared.

Distintas transformaciones de una loseta inicial, dan lugar a distintos recubrimientos de una pared o un muro.

En matemáticas interesa especialmente estudiar aquellos recubrimientos que se obtienen a partir de un paralelogramo sometido sólo a traslaciones, giros y reflexiones, porque las las tramas así obtenidas son la versión bidimensional de las estructuras (tridimensionales) que se encuentran en la mayoría de los cristales en la naturaleza. A este tipo de recubrimientos de un plano se les llama teselaciones.

Al estudiar teselaciones, la primera pregunta que se buscó responder es ¿de cuántas maneras distintas podemos teselar una pared? Despues de siglos de trabajo de miles de personas, los matemáticos Polya y Nigli demostraron, independientemente, en 1925, que hay exactamente 17 maneras distintas dehacerlo. Este tipo de recubrimientos se encuentran todo a lo largo del planeta: en estampados de telas y papeles, en relieves de madera, en decoraciones de paredes, etc. De los muchísimos ejemplos que podemos encontrar del uso de las teselaciones para decorar, hay uno que destaca como joya única: el de los arabescos del palacio de la Alhambra.

Lo que hace tan especiales a los mosaicos de los muros y celosías de la Alhambra es que contienen ejemplos de todas y cada una de las 17 maneras posibles de teselar un plano. Esto es, las paredes de la Alhambra nos ofrecen el único catálogo completo de las posibles teselaciones de una superficie plana construido antes del siglo XX. La Alhambra demuestra, pues, que los árabes habían encontrado todas las posibles teselaciones antes del siglo XIII. Sin embargo, se ha necesitado muchísimo tiempo, muchas matemáticas, y un profundísimo proceso de abstracción para demostrar que estas 17 maneras son, de hecho, las únicas posibles.

Mucha gente pregunta que para qué sirven las matemáticas. La Alhambra y el Generalife, cons sus catálogos de hermosísimos mosaicos, suponen un ejemplo estupendo de la utilidad de las matemáticas. La cantidad de visitantes que los recorren cada día es tal, que con frecuencia resulta imposible disfrutar sus rincones, fuentes y flores. Hay ratos en que se está muy a gusto allí, pero otros en que hay tal cantidad de gente que resulta agobiante. Cuando eso ocurre es el momento de echar mano a las matemáticas. Buscamos un banco o cornisa sobre la que sentarnos a la sombra, sacamos el cuaderno y el lápiz, levantamos la vista a muros, techos y ventanas y desplegamos las alas de la imaginación. En situaciones como esta, las matemáticas nos ofrecen siempre la posibilidad de volar.
<u>Fin del paréntesis sobre el recubrimiento de un plano con polígonos regulares y losetas</u>.)

Las Estufas 15-18 albergan semilleros, donde tiene lugar la primera y más delicada fase del cultivo de especies ornamentales de flor. Una vez brotan de las semillas, las plantas necesitarán, antes o después, más espacio y alimento en sus raíces en su parte aérea. Hay que transplantarlas a recipientes de mayor tamaño, un proceso que se conoce con el nombre de 'enmacetado'. El enmacetado tiene lugar en las 'enmacetadoras' y 'platabandas' ubicadas frente a las Estufas (indicadas con los números 12 y 14 en el plano).

Parada y ejercicio 4. Sobre avispas y esferas.

Seguimos nuestro recorrido a lo largo del lado Sur del recinto. A la derecha, después de las platabandas, nos encontramos el camino que lleva al Huerto del Retiro, e inmediatamente después la última adquisición del Vivero, tan reciente, que aún no aparace en el plano: el invernadero en

que hasta 2008 (fecha en que lo donaron a Las Estufas) los Viveros Bourguignon cultivaron sus orquídeas. Es una construcción preciosa a dos aguas. Sin embargo, el curioso detalle de sus esquinas, induce a pensar que originariamente tenía una cubierta curvilínea, como la de la estufa Nº 7. Probablemente para abaratar costes a la hora de cambiar los cristales rotos, en algún momento transformaron la curva en recta. A continuación del invernadero Bourguignon, a izquierda y derecha, túneles y umbráculos (de 'umbrío') proporcionan sombra y un ambiente más húmedo para las plantas que lo necesitan. Nos llaman la atención las cestas que cuelgan de muchas de estas construcciones de hierro galvanizado.

Javier Spalla nos cuenta que se trata de 'reservorios de pulgones', también llamados 'aphid banker plants' (su nombre en inglés), curiosos ejemplos de cómo utilizar la guerra biológica para erradicar las plagas de pulgones sin usar insecticidas.

(<u>Nota histórica sobre las 'banker plants':</u>

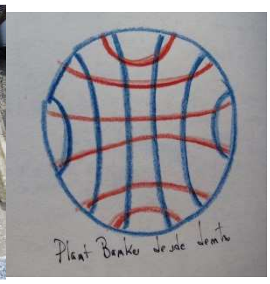
Como en el caso de las vacunas, en las 'banker plants' inoculamos especímenes de la plaga que queremos erradicar. Supongamos que algunas de las flores que cultivamos en umbráculos o túneles están infectadas con una plaga de algún tipo de pulgones. Por un lado, colgamos sobre las flores los cestos semiesféricos llenos de centeno que ha sido inoculado en el laboratorio con un tipo de pulgones que sólo ataca a las gramíneas (en Las Estufas no se cultivan plantas gramíneas).

Por otro lado, soltamos en el aire avispas microscópicas, inofensivas para las personas, y parásitas de los pulmones en el centeno. Las diminutas avispas tienen un aguijón en su abdomen que clavan en los pulgones del centeno, poniéndoles un huevo a cada uno dentro. Una vez tiene el huevo de avisa dentro, el pulgón se convierte en un incubadora, por así decirlo. La larva de la nueva avispa va creciendo como parásita dentro de él, comiéndoselo poco a poco por dentro hasta invadirle completamente y convertirle en momia. Una vez desarrollada, la nueva avispa abre una escotilla perfectamente circular en la cáscara de la momia de pulgón, y sale por ella. Los pulgones inoculados en el centeno no bastan para alimentar a la creciente población de avispas (cada avispa puede poner cientos de huevos), que comienza a alimentarse, también, de los pulgones que habían invadido nuestro cultivo de flores, acabando con la plaga. Facinantes imágenes de esta guerra biológica pueden verse en la red. Basta escribir en cualquier buscador 'parasitic aphid wasp in action', o cualquier frase similar.

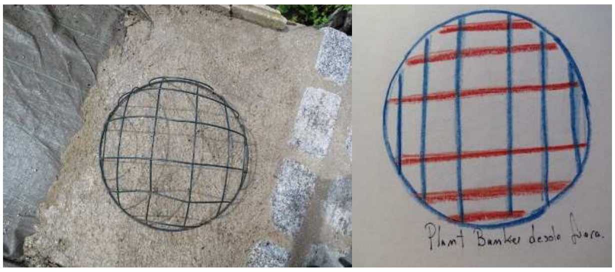
Cuando leemos o escuchamos la palabra 'avispa', solemos pensar con miedo en ese insecto negro y amarillo de zumbido furioso y dolorosa picadura. Sin embargo, la gran mayoría de las avispas son insectos solitarios e inofensivos para el ser humano. Y no sólo no son dañinas, sino que, de hecho y a pesar del miedo que nos provocan, las avispas son sumamente beneficiosas para el ser humano. Casi todos los insectos considerados plagas en el planeta son presa de una especie u otra de avispa, ya sea sea como alimento, ya sea como anfitrión de sus larvas parasitarias. Las avispas son tan eficaces controlando plagas, que hoy en día se usan de forma generalizada como insecticida ecológico para proteger los cultivos.

Fin de la nota histórica sobre las 'banker plants'.)

Nos fijamos en la curiosa cesta que contiene la 'banker plant'. Hecha claramente a mano con varillas de metal dobladas, tiene la forma de medio casquete esférico. Encontramos una vacía en el suelo. La cogemos y la estudiamos.



Mirando desde dentro del cuenco que forma el cesto, se ve claramente que las varillas de metal han sido curvadas para formar media esfera.



Sin embargo, vistas desde fuera y desde arriba, salvo por la sombra que proyectan sobre el suelo, las varillas tienen el mismo aspecto que si fuesen planas. Pienso en los pulgones inoculados en el centeno. Yo puedo elegir mirar a cesta desde dentro o desde fuera, lo que me permite reconocer que tiene forma semiesférica. Pero los pulgones, viven en la cesta y, además, son pequeñísimos.... Me los imagino caminando por las varillas y prestando mucha atención a lo que ve. ¿Qué deducirán sobre la forma de la cesta?

Veamos... Una de las varillas tiene la forma de una circunferencia (digamos que es el Ecuador de la cesta), y todas las demás tienen la forma de arcos de círculo. Si el pulgón fuese caminando por la varilla con forma de circunfarencia, al ser tan pequeñisimo en comparación con ella no notaría que la varilla está curvada, y pensaría que es plana. pero como nada en ningún momento le impedirá seguir caminando (puesto que aunque no se de cuenta irá dando vueltas y vueltas a la circunferencia), pensará que la varilla es infinita (sin fin, que no se acaba nunca).

Por otro lado, si el pulgón fuese caminando por cualquiera de las varillas con forma de arco de círculo, también pensaría que es plana, pero esta vez en algún momento la varilla se acabará, y el pulgón sabrá que es finita (es decir, con fin, que se termina). Así pues, cada pulgón describirá la cesta según sobre qué varilla camine, Exactamente lo mismo que hacemos los humanos cuando intentamos describir la forma del Universo, esa enorme esfera celeste que rodea al planeta Tierra. Nuestras descripciones a lo largo de la historia, han estado siempre condicionadas por nuestro tamaño, por el alcance de nuestras herramientas y por hacia dónde miramos.

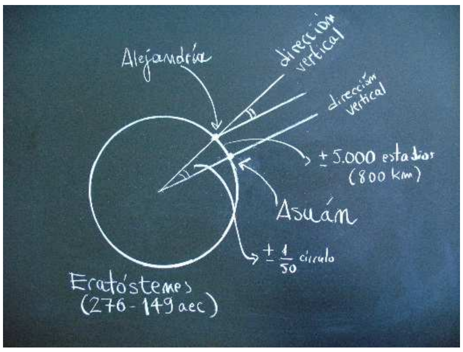
(<u>Paréntesis histórico sobre la forma del Universo</u>:

Según todas nuestras observaciones, el Universo es ilimitado, puesto que en ningún momento de nuestras exploraciones hemos encontrado ninguna indicación de que tenga borde. Sin embargo, eso no significa que tenga necesariamente que ser de temaño infinito. Puesto que tanto nuestro tamaño como alcance de nuestras herramientas son pequeñísimos en comparación con lo que conocemos del Universo (y sabemos que lo que conocemos es, a su vez, pequeñisinmo en comparación con lo que aún nos queda por conocer) podría estarnos ocurriendo lo que a los pulgones que pasean por la cesta de la 'banker plant'.

Somos demasiado pequeños y tampoco podemos salirnos del Universo y mirarlo desde fuera. ¿Cómo poder saber, a pesar de estas limitaciones, si el Universo es finito o no, y si es plano o esférico? La respuesta está en pensar, combinando la inteligencia con las observaciones.

> "¿Cómo es posible que la matemática, que al fín y al cabo no es más que un producto del pensamiento humano que es independiente de la experiencia, encaje tan bien con los objetos de la realidad física? ¿Puede la razón sin experiencia descubrir, puramente pensando, propiedades de cosas reales? La experiencia sigue siendo, por supuesto, el único criterio para validar la utilidad física de una construcción matemática. Pero el principio creativo reside en la matemática. Por lo tanto, de alguna manera mantengo como cierto que el pensamiento puro puede alcanzar la realidad, como los ancianos soñaron". (Albert Einstein, conferencia ante la Academia de las Ciencias de berlí, 27 de enero de 1921.)

Entre todas las personas que se han dedicado a lo largo de la historia a estudiar la forma del Universo, las más conocidas son los matemáticos Eratóstenes (276-149) y Johannes Kepler (1571-1630), y el físico Albert Einstein (1879- 1955). El gran reto de la antigüedad no fue reconocer la forma de la Tierra, que se sabía redonda desde, al menos, el siglo IV a.C.[8] sino determinar su tamaño. ¿Cómo medir la Tierra si resultaba imposible atravesar los tenebrosos océanos? La respuesta más ingeniosa la dio a finales del siglo II a.C. Eratóstenes, uno de los primeros maestros de la biblioteca de Alejandría. Eratóstenes comparó la altura del Sol en un mismo día —el solsticio de verano— en dos ciudades de Egiptorelativamente alejadas, Alejandría y Siena, hoy Asuán. En Siena, el día del solsticio de verano el Sol está en su cenit, perfectamente vertical sobre nuestras cabezas, y no proyecta sombra. Eratóstenes llegó a la conclusión de que la altitud del Sol en Alejandría medía una cincuentava parte del círculo completo.



Usando ese dato, y calculando que las caravanas de camellos tardaban cincuenta días en llegar a Siena y recorrían unos 100 estadios diarios, estimó el meridiano terrestre en 252.000 estadios egipcios, unos 39.690 de nuestros kilómetros —de 170 a 180 metros de promedio por estadio—, un resultado con tan sólo la distancia entre Segovia y Oviedo de error. (Datos actuales en el Anuario de la Real Sociedad de Astronomía: Radio Ecuatorial, 6378,14 kms.; Ecuador 40.075,12 kms.; Radio Polar, 6356 , 5 kms.; Meridiano 39.939,16 kms.).

[8] En el siglo VII a.C. los jonios describen la Tierra como un disco, de lo que se mofa Herodoto. En el siglo siguiente, el discípulo de Tales Anaximandro de Mileto, constata la curva del meridiano, e imagina la Tierra como un cilindro o incluso una esfera. En el siglo V, los filósofos pitagóricos describen la Tierra como redonda, pero no dan argumentos para ello. En el siglo IV, el navegante Piteas observa cómo varía la longitud de los días en las altas latitudes del Atlántico norte, lo que casa mal con una Tierra plana. De ahí en adelante la Tierra es aceptada como una esfera por todos, incluidos Platón y Aristóteles, que anota en el siglo IV las dos observaciones fundamentales que llevan a esta conclusión.

El cálculo exacto del tamaño de la Tierra no se pudo hacer hasta conocer el número que mide la proporción entre la circunferencia y el radio de un círculo, esto es, π. La caida de las civilizaciones antiguas hizo que mil años de conocimientos acumulados se perdiesen para el continente europeo, pero, afortunadamente, el declive de la civilización occidental coincidió con el auge de la civilización y cultura del Islam. Un ejemplo es el de al-Kashi de Samarcanda (1390-1450), que queriendo conocer con precisión el tamaño de la Tierra, refinó las técnicas de Arquímedes y en 1420 logró calcular 16 lugares decimales π. De hecho, si la Tierra fuese una esfera perfecta, los cálculos de al- Kashi tendrían tan solo una diezmillonésima parte de centímetro de error. El único logro remotamente comparable al de al-Kashi es el del matemático chino del siglo V Tsu Ch'ung-chih, que consiguió el valor correcto de π hasta seis cifras decimales. Lambert demostró en 1761 que π es, irracional y, por tanto, su expansión decimal tiene una infinitad de dígitos.

Kepler, a su vez, calculó la forma de las órbitas de los planetas del sistema solar (la Tierra incluida), cuando giran alrededor del Sol.

"En tiempos de ansiedad e incertidumbre como los nuestros, cuando tan difícil es sentir satisfacción por el curso de la humanidad, resulta particularmente consolador pensar en un hombre tan excepcional y sereno como Kepler. [...] Al parecer, la mente humana ha de construir primero las formas de modo independiente, para luego poder hallarlas en las cosas. Las verdaderas proezas de Kepler son un ejemplo magnífico de esta afirmación: el conocimiento no puede surgir de la experiencia tan sólo, sino de la comparación de las invenciones del intelecto con los hechos observados." (A. Einstein, *Johannes Kepler*, en 'Ideas and opinions' (1954), Crown Pub. 1960, p. 254)

Ilustración original del libro de Misterium Cosmographicum (1596).

Einstein estudió la forma del Universo del que forma parte el sistema solar, y en la conferencia que impartió en la Academia de las Ciencias de Berlín en 1921, explicó algunas de sus ideas.

"¿Podemos visualizar un universo finito pero ilimitado? La respuesta habitual a esta pregunta es 'no', pero esta no es la respuesta correcta. El propósito de las siguientes reflexiones es demostrar que la respuesta tendría que ser 'sí'. Quiero demostrar que se puede ilustrar sin gran dificultad la teoría de un universo finito, con una representación mental a la que, con un poco de práctica, pronto nos acostumbraremos.

¿Qué queremos expresar cuando decimos que nuestro espacio es infinito? Tan sólo que podríamos colocar cualquier cantidad de cuerpos de igual tamaño, unos junto a otros, sin llegar a cubrir el espacio [...] Veamos ahora un ejemplo de un continuo bidimensional que es finito pero sin límites. Imaginemos la superficie de un gran globo y una cantidad de pequeños discos de papel, todos del mismo tamaño. Colocamos uno de los discos en cualquier lugar sobre la superficie del globo. Si desplazamos el disco a voluntad sobre la superficie del globo, en ninún momento del recorrido tropezaremos con un límite. Decimos, por lo tanto, que la superficie esférica del globo es un continuo sin límites.

Es más, la superficie esférica es un continuo finito. Porque si pegamos los discos de papel sobre el globo de manera que ningún disco se superponga a otro, la superficie de la esfera llegará a estar tan cubierta que será imposible colocar otro disco. Esto significa exactamente que la superficie esférica del globo es finita en relación a los discos de papel.

Y, más aún, la superficie esférica es un continuo no euclídeo de dos dimensiones, es decir, que las leyes de posición de figuras rígidas en ella no concuerdan con las del plano eucídeo. Esto puede demostrarse de la siguiente forma. Tomamos un disco y lo rodeamos, en círculo, por otros seis discos, cada uno de los cuales debe estar rodeado, a su vez, por otros seis discos y así sucesivamente.

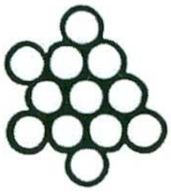


Ilustración original de la conferencia *Geometría y experiencia* de Einstein, 1921.

Si llevamos a cabo esta construcción sobre una superficie plana, obtendremos un patrón ininterrumpido con cada disco tocando otros seis, con excepción de los que estén en la parte externa. En un primer momento, esta construcción también promete éxito sobre una superficie esférica, y cuanto menor sea el radio del círculo en proporción al de la esfera, tanto más prometedora parecerá. Pero según se avanza en la construcción va resultando más patente que la colocación interrumpida de los discos en la manera indicada no es posible, como sí lo era en el caso de la geometría euclídea del plano. Es de esta manera que las criaturas que no puedan abandonar la superficie esférica, y no puedan siquiera echar una ojeada fuera de la superficie esférica hacia el espacio tridimensional, podrían llegar a descubrir, por simple experimentación con los discos, que su 'espacio' bidimensional no es eucídeo, sino esférico.

Según los últimos resultados de la teoría de la relatividad, es probable que nuestro espacio tridimensional sea también aproximadamente esférico, esto es, que las leyes de localización en él de cuerpos rígidos no estén dadas por la geometría euclídea, sino en forma aproximada por la geometría esférica, si consideramos partes del espacio que sean suficientemente extensas." (A. Einstein, *Geometría y experiencia*, 1921 recogido en 'Ideas and opinions' (1954), Crown Pub. 1960, pp. 235-240.)

<u>Fin del paréntesis histórico sobre la forma del Universo</u>.)

<u>Ejercicios</u>:

- Acércate a uno de los umbráculos. Párate en la puerta, mira el techo y dibújalo en tu cuaderno.

Ahora, camina por el caminito del centro, con cuidado para no pisar ninguna planta. Párate a la mitad, mira de nuevo el techo, y dibújalo en tu cuaderno. Sal de nuevo, e imagina que estás en un helicóptero, mirando el tejado del umbráculo justo desde arriba. Dibuja lo que ves en tu cuaderno. Si tuvieses que reponer este tejado, y tuvieses que hacerlo con una única pieza grande de tela, ¿de qué forma tendrías que cortar la pieza?

- Acércate ahora a uno de los túneles. Párate en la puerta, mira el techo. ¿Cómo describirías su forma? Dibújalo en tu cuaderno. Ahora, camina por la veredita del centro, con cuidado para no pisar ninguna planta. Párate a la mitad, mira de nuevo el techo, y dibújalo en tu cuaderno. Sal de nuevo, e imagina que estás en un helicóptero, mirando el tejado del umbráculo justo desde arriba. Dibuja lo que ves en tu cuaderno. Si tuvieses que reponer este tejado, y tuvieses que hacerlo con una única pieza grande de tela, ¿de qué forma tendrías que cortar la pieza?

- Dibuja en el cuaderno un posa-vasos redondo, un plato redondo, un cenicero redondo y una pelota redonda. Hazlo de forma que se distinga con la mayor claridad posible qué representa cada uno de los dibujos que hagas. No importa si están bien o mal dibijados. Sólo importa que se sepa qué es cada cosa.

(Si vamos con gente chica, lo dejamos aquí y seguimos caminando hasta la entrada del recinto, donde pararemos para hacer un último ejercicio de despedida.)

- Intenta dar cuatro razones por las que sabemos que la tierra es redonda.
- Este va a ser nuestro último ejercicio de matemáticas. Será algo distinto, algo que probablemente no hayas hecho nunca. No necesitaremos muchos conocimientos para llevarlo a cabo. De hecho, sólo necesitaremos una cosa: atrevernos a pensar de otra manera.

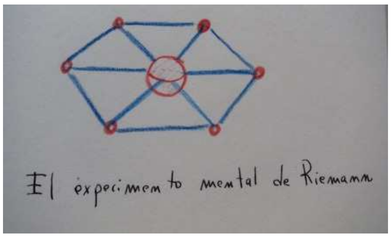
Tampoco tienes que hacerlo aquí y ahora. Puedes llevarte la pregunta contigo, e ir pensando sobre ella, en el autobús, en el metro, en la ducha,... hasta que se te ocurra algo. Antes de leer la pregunta, necesitamos repasar un par de ideas.

Desde los orígenes de la ciencia, la humanidad ha intentado entender la forma del Universo construyendo modelos matemáticos conceptuales (imaginados) basados en las observaciones y experimentos. Estos modelos matemáticos de la realidad se usan para pensar sobre los fenómenos de la naturaleza, y nos ayudan a explicarlos y predecirlos.

Uno de los tipos más utiles de modelos matemáticos son los 'experimentos mentales'. Los experimentos "mentales" son situaciones imaginarias, en las que nos hacemos preguntas del tipo "Supongamos que estás en esta situación, y que tal cosa es cierta ¿Qué crees que va a pasar a continuación?". Mi experimento mental favorito lo pensó el matemático Bernhard Riemann (1826-1866) a mediados del siglo XIX. En aquella época, se pensaba que el Universo tiene la forma de una enorme caja de zapatos, una caja de zapatos de tamaño infinito, de hecho. Bernhard Riemann no lo tenía tan claro. «¿Por qué ha de ser el Universo una enorme caja?», se preguntó. «¿Por qué no puede ser una esfera inmensa?».

Riemann pensaba que si el Universo fuese esférico, debido a su enorme tamaño nosotros no nos daríamos cuanta y lo percibiríamos plano. Pensemos en un diminuto pulgón caminando sobre la superficie de una esfera enorme. Podría estar avanzando eternamente sin encontrar jamás un borde, un límite y, sin embargo, estaría recorriendo una región finita; además, dado su pequeño tamaño, en todo momento el pulgón pensaría estar sobre un plano. Algo así podría estar pasándonos a nosotros. ¿Cómo podemos saber, entonces, si el universo es plano o curvo? Buscando respuesta a esta pregunta, Riemann pensó el siguiente experimento mental.

Elegimos seis lugares equidistantes sobre la línea del Ecuador y los unimos entre sí formando un hexágono con centro en el centro de la Tierra. Desde cada uno de ellos lanzamos, en el mismo momento y a la misma velocidad constante, un cohete.



Si los seis cohetes avanzan sin desviarse siguiendo la dirección marcada por los radios del hexágono original, en todo momento ocuparán los vértices de un hexágono con centro en el centro de la Tierra. Sabemos que un hexágono está dibujado sobre un plano si y sólo si tiene todos sus lados y radios de la misma longitud. Si, según van avanzando en el espacio, la distancia entre cohetes consecutivos se mantiene igual a la distancia entre cualquiera de ellos y el centro de la Tierra, esto indica que los cohetes avanzan formando un hexágono plano y concluiremos que el Universo tiene curvatura cero. Si la distancia entre cohetes se va haciendo mayor que la distancia entre cada uno de éstos y el centro de la Tierra, el hexágono que forman no es plano sino esférico. Por último, si la distancia entre cohetes se va haciendo más pequeña que la distancia entre cada uno de ellos y el centro de la Tierra, los hexágonos avanzan formando un hexágono trazado sobre la superficie de una silla de montar, y esta será la forma del Universo.

<u>Pregunta</u>: Ahora que ya sabes lo que es un experimento mental, intenta diseñar algún experimento mental con el que se podría comprobar que la tierra es redonda.

Seguimos paseando por el itinerario marcado con flechas rojas, disfrutando con el muestrario de vivaces expuesto junto a la pared Este de la Estufa Nº1. Cuando llegamos a la esquina Noreste, el mismo sitio donde empezamos el paseo, paramos y sacamos por última vez el cuaderno.

<u>Ejercicio</u>: Dibuja en tu cuaderno un mapa del recorrido que acabamos de hacer. Antes de que se te olviden, marca en él las cosas que más te hayan gustado o llamado la atención. Asegúrate de tener en él al menos un árbol, al menos una flor y al menos una construcción. Puedes hacerlo con palabras, símbolos, dibujines o como quieras. Una vez que llegues a casa, puedes copiarlo en una hoja más grande, colorearlo y enmarcarlo.

FIN

Primer boceto. Acabado el 23 de septiembre de 2016

ANEXO 1: Sobre dosis y porcentajes

Querido Manu:

Quería contarte que en el Vivero de las Estufas no sólo soltamos “bichitos” para controlar las plagas y las enfermedades que puedan surguir en nuestros cultivos, sino que también utilizamos preparados y productos de los denominados “blandos”, aptos en agricultura ecológica, para preservar el medio ambiente. En una manera de contribuir a la sostenibilidad de nuestro pequeño vergel y del planeta mismo, que venimos practicando desde 2006 y al que todos debemos de sumarnos.

Te voy a mostrar una tabla con algunos de los productos que nosotros empleamos, y también te voy a dar ejemplos de algunos ejercicios que llevamos a cabo con estos productos y que son muy parecidos a los que haces tú en tus clases de matemáticas.

TABLA DE PRODUCTOS BIOLÓGICOS Y DOSIS

PRODUCTOS	ACCIÓN	DOSIS
Jabón potásico	Insecticida	10cc/1 litro agua
Ajo	Insecticida/Repelente	3-5 ml/1 litro agua
Algas	Insecticida/vigorizante	3cc/1 Litro agua
Leche	Fungicida	100cc leche/900 agua (10%)
Bicarbonato	Fungicida	20gr /litro agua
Agua oxigenada	Fungicida, bactericida	15ml/ 14litros agua
Vinagre	Herbicida	0.2 litros/m2
Ferramol	Helicida (Caracoles y Babosas)	Puñado de cebo entre plantas afectadas
Quelato de Hierro	Clorosis Férrica	1gr/litro agua
Extracto de Albahaca	Fitofortificante/ Antioxidante/ Repelente	- Aplicación en hoja: 3ml/1litro agua (cada 7-10 días) - Aplicación en riego: 5ml/1litro agua (cada 7-10 días)

Aceite de parafina	Insecticida(Tratamiento de brotación y Cochinilla)	5-10cc/litro agua

Ejercicios:

1. El jabón potásico es un producto muy utilizado contra el pulgón. ¿Cuántos mililitros (ml) 10 cc?

El jabón potásico lo usamos a una dosis de 1%, ¿qué queremos decir exactamente con la expresión "una dosis de 1%"?

Una mochila para tratamientos tiene una capacidad de 15 litros. ¿Cuánto jabón potásico tendrías que añadir a una de ellas para obtener una dosis de un 1%?

2. La clorosis es una carencia de hierro, que se manifiesta con el amarilleo de las hojas y se trata con quelato de hierro. Supongamos que tenemos unas Hortensias y vamos a preparar una regadera de 10 litros de agua, ¿cuánto quelato de hierro echarías para conseguir la dosis indicada en la tabla?

Te invito a reflexionar sobre la belleza de nuestro planeta tierra y a que tú contribuyas también con tus pequeños gestos a preservarlo.

Victoria Olaya Magadán

Técnico Auxiliar de Jardinería

Vivero de Estufas